Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Finał (SP 7-8)

1. O liczbach całkowitych wiemy, że spełniają warunek $a^2 + b^2 = c^2$. Udowodnij, że liczba abc dzieli się przez 6.
2. Trzy parami różne liczby a, b, c spełniają warunek $a + b = 2c$. Ile wynosi $\frac{a}{a-c} + \frac{b}{b-c}$?
3. Na początku na tablicy znajdują się wszystkie liczby naturalne od 1 do 50. W każdym ruchu wymazujemy dwie dowolne liczby i w ich miejsce wpisujemy ich różnicę. Po 49 ruchach na tablicy zostanie jedna liczba. Czy może być to liczba 8?
4. W czworokącie wypukłym ABCD trójkąty ABC i CDA mają równe pola. Wykaż, że przekątna AC połowi przekątną BD.
5. Kwadrat o boku 10 cm podzielono linią prostą na dwie różne figury w taki sposób, że obwody otrzymanych figur różniły się o 8 cm, a różnica pól tych figur była najmniejsza z możliwych. O ile centymetrów kwadratowych różniły się pola tych dwóch figur?
6. Znajdź wszystkie pary liczb trzycyfrowych, których iloczyn jest podzielny przez 8100, a jedną z nich otrzymujemy przez zapisanie cyfr drugiej w odwrotnej kolejności.
7. Ile zer ma na na końcu w zapisie dziesiętnym liczba
$$2023! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2022 \cdot 2023?$$
8. Wykaż, że jeżeli liczby całkowite x, y, z, t spełniają równanie $x^2 + y^2 + z^2 = 4t^2$, to x, y, z są parzyste.
9. Dzieci na obozie matematycznym wybrały się na pieszą wycieczkę. Grupa jednak tak się rozciągnęła, że między pierwszym a ostatnim rzędem była różnica 100m. Grupa szła z prędkością 3km/h. W pewnym momencie opiekun idący w pierwszym rzędzie chwycił hulajnogę i pojechał z prędkością 15km/h aż na koniec grupy, żeby sprawdzić, czy nikt się nie zgubił. Po dojechaniu do ostatniego rzędu opiekun natychmiast zawraca i wraca na początek wycieczki. Ile czasu minie od chwili startu opiekuna na hulajnodze do jego powrotu? Wszyscy poruszają się ze stałą prędkością. (Uwaga: grupa nie zatrzymuje się, ignoruje nadjeżdzającego opiekuna i nadal porusza się do przodu ze stałą prędkością.)
10. 30 zawodników rozegrało mecze badmintona. Każdy grał z każdym. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Nie było remisów.

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Finał rozwiązania (SP 7-8)

1. Należy udowodnić, że abc dzieli się przez 2 i przez 3. a) Jeśli a lub b dzieli się przez 2, to abc też. Jeśli nie, to a^2 i b^2 są nieparzyste, więc c^2 jako suma nieparzystych liczb jest liczbą parzystą. Stąd c też jest liczbą parzystą, więc abc dzieli się przez 2. b) Jeśli c dzieli się przez 3, to abc też. Jeśli nie, to c^2 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3 (kwadrat liczby przy dzieleniu przez 3 może dawać tylko resztę 0 lub 1). Oznacza to, że jedna z liczb a^2, b^2 musi być podzielna przez 3, zatem również a lub b jest podzielna przez 3 czyli abc jest podzielna przez 3.

2. Sprowadzamy do wspólnego mianownika. $\frac{a}{a-c}+\frac{b}{b-c}=\frac{a(b-c)+b(a-c)}{(a-c)(b-c)}=\frac{2ab-c(a+b)}{ab+c^2-c(a+b)}$. Podstawiamy $c=\frac{1}{2}(a+b)$ i otrzymujemy $\frac{2ab-\frac{1}{2}(a+b)^2}{ab+\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{2}(a+b)^2}=\frac{2(ab-\frac{1}{4}(a+b)^2)}{ab-\frac{1}{4}(a+b)^2}=2$.

3. **Jest to niemożliwe.**
Zauważmy, że suma wszystkich liczb od 1 do 50 jest nieparzysta (dodajemy 25 liczb parzystych i 25 liczb nieparzystych). Pokażemy, że po każdym ruchu suma wszystkich liczb zostanie nieparzysta. Mamy dwie możliwości: a) wykreślamy dwie liczby o różnej parzystości. Wtedy ich suma i różnica są nieparzyste, czyli zamiast liczb o nieparzystej sumie wpisujemy liczbę nieparzystą. Zatem suma wszystkich liczb pozostaje nieparzysta. b) wykreślamy dwie liczby o tej samej parzystości. Wtedy ich suma i różnica są parzyste, więc analogicznie suma wszystkich liczb pozostaje nieparzysta. Zatem po 49 ruchach ostatnia liczba również musi być nieparzysta - czyli nie może być to 8.

4. Narysujmy wysokość BE trójkąta ABC oraz wysokość DF trójkąta ACD. Są one równoległe (prostopadłe do przekątnej AC) oraz tej samej długości (trójkąty o tej samej podstawie AC mają równe pola). Zauważmy, że czworokąt BFDE jest równoległobokiem, zatem przekątne BD i EF połowią się. Stąd AC jako przedłużenie odcinka EF połowi BD.

5. **36cm^2**. Są następujące możliwości podzielenia kwadratu: wzdłuż przekątnej (ale wtedy figury są przystające), równolegle do boku na dwa prostokąty, na trapez i trójkąt oraz na dwa trapezy. W przypadku dwóch prostokątów ich obwody wynoszą: $2(10+x)$ i $2(10+10-x)$. Zakładając, że x oznacza krótszą część podzielonego boku. Wtedy $2(20-x)-2(10+x)=8, x=3$. Pola prostokątów wynoszą 30 oraz 70 - ich różnica to 40. Rozważmy teraz przypadek podziału na trapez i trójkąt prostokątny. Jako a, b oznaczmy przyprostokątne trójkąta, jako c przeciwprostokątną. Obwód trapezu jest większy od trójkąta i wynosi: $40+c-a-b$. Różnica obwodów to $40+c-a-b-(a+b+c)=8$. Czyli $40-2a-2b=8, 16=a+b$. Różnica pól wynosi $100-\frac{ab}{2}-\frac{ab}{2}=100-ab$. Jest ona najmniejsza, gdy $aib=8$, a $ab=64$ i wynosi 36. Rozważmy teraz przypadek podziału na dwa trapezy. Oznaczmy boki mniejszego trapezu jako $10, c, a, b$, a drugiego $10, c, 10-a, 10-b$. Różnica obwodów to $10-2a+10-2b=20-2a-2b=8$. Zatem $6=a+b$. Różnica pól wynosi $\frac{10(10-a+10-b)-10(a+b}{2}=5(20-2a-2b)$. Wiemy, że $a+b=6$, więc różnica pól to $5(20-12)=40$. Podsumowując wszystkie przypadki najmniejsza różnica pól wynosi 36 cm^2.

6. **Jedyną parą spełniającą warunki zadania jest 576 i 675.** Iloczyn liczb jest podzielny przez 8100, więc liczby muszą być podzielne przez 9. Na końcu liczb nie może być 0, więc jedna z tych liczb musi być podzielna przez 25, druga przez 4. Możliwe końcówki jednej liczby to 25 lub 75. Jedyną liczbą podzielną przez 9 i kończącą się na 25 jest 225, ale wtedy 522 nie jest podzielne przez 4. Stąd jedna z liczb to 675, a drugą 576. Za podanie pary liczb, ale nie uzasadnienie, że to jedyna opcja przyznajemy 5 punktów.

7. **Liczba ma 503 zera na końcu.** Sprawdzamy przez jaką największą potęgę dziesiątki dzieli się liczba 2023!. Rozłóżmy ją na czynniki pierwsze. Będzie nas interesować, ile razy pojawi się 5 i 2. Oczywiście dwójek będzie więcej niż piątek, dlatego możemy zliczać same piątki, wiedząc, że dla każdej piątki znajdzie się dwójka do pary. Sprawdzamy, ile liczb od 1 do 2023 dzieli się przez 5. Najwyższa wielokrotność piątki w tym przedziale to 2020, więc $2020:5=404$ liczby dzielą się przez 5 i dadzą po jednej piątce do

rozkładu. Teraz sprawdzamy, ile liczb dzieli sie przez 25, czyli dadzą jeszcze jedną piątkę. Jest ich 80. Analogicznie postępujemy dla kolejnych potęg piątki: liczb podzielnych przez 125 jest 16, a podzielnych przez 625 - 3. Kolejna potęga piątki jest już za duża. Dodajemy wszystko: piątek w rozkładzie na czynniki pierwsze jest $404 + 80 + 16 + 3 = 503$, czyli liczba 2023! dzieli się przez maksymalnie $10^5 03$ i ma 503 zera na końcu.

8. Załóżmy nie wprost, że któraś z x, y, z nie jest parzysta. Wiemy, że podnoszenie do kwadratu zachowuje parzystość. Prawa strona równości jest podzielna przez 4, więc w szczególności jest parzysta. W takim razie nieparzystych składników po lewej stronie musi być parzyście wiele, czyli dokładnie dwie z x, y, z są nieparzyste. Bez straty ogólności przyjmijmy, że to x i y. Wtedy da się zapisać $x = 2k+1, y = 2n+1, z = 2l$ dla całkowitych k, n, l. Wtedy lewa strona równania wygląda tak: $(2k + 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2l)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4l^2 = 4(k^2 + k + n^2 + n + l^2) + 2$. Stąd widać, że lewa strona daje resztę 2 przy dzieleniu przez 4, a strona prawa jest podzielna przez 4. Dostajemy sprzeczność, co kończy dowód.

9. **Minie 50 sekund.** Zamieńmy jednostki 100m = 0,1km. Policzmy najpierw czas t_1, który minie od czasu startu opiekuna do chwili dotarcia na koniec wycieczki. Opiekun porusza się w jednym kierunku z prędkością 15 km/h, a grupa w przeciwnym kierunku z prędkością 3km/h, więc względnie opiekun porusza się z prędkością 18 km/h. $t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{0.1}{18} = \frac{1}{180}h = 20$ sekund. Z powrotem grupa i opiekun poruszają się w tym samym kierunku, więc względna prędkość opiekuna to 12 km/h. Analogicznie liczymy czas powrotu $t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{0.1}{12} = \frac{1}{120}h = 30$ sekund. Łącznie minie $20 + 30 = 50$ sekund. Zadanie można też rozwiązać, pisząc równania na położenia osób w danym czasie.

10. **Nie.** Załóżmy, że każdy z graczy wygrał tyle samo meczów, oznaczmy tę liczbę jako n. Wtedy wszystkich meczów było $30n$ (jeden mecz mógł być wygrany tylko przez jedną osobę). Każdy z graczy rozegrał 29 meczów i przegrał $29 - n$ z nich. Czyli tak samo można zapisać liczbę wszytkich meczów jako $30(29 - n)$. Stąd $30n = 30(29 - n)$, czyli $n = \frac{29}{2}$. n jako liczba meczów musi być liczbą naturalną, więc taka sytuacja nie jest możliwa.