Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Półfinał (SP 7-8)

1. Czy wśród każdych pięciu liczb całkowitych istnieją takie trzy, których średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą?

2. Ile różnych trójkątów można ułożyć z 23 zapałek?

3. W pewnym roku wypadły 53 piątki. Ile czwartków mógł liczyć ten rok?

4. Dwa bloki położone są po tej samej stronie ulicy. Wejścia położone są w odległości 250m od siebie. W pierwszym bloku mieszka 100 osob, a w drugim 150 osób. Miasto chce zbudować przystanek autobusowy pomiędzy tymi blokami, tak, żeby suma odległości, które muszą pokonać mieszkańcy z przystanku do swojego domu, była jak najmniejsza. Zakładamy, że przystanek znajdowałby się na odcinku łączącym wejścia od obu bloków.

5. Na kartce wydrukowano liczby całkowite. Jedną z nich jest liczba 2022. Oprócz tego wiemy, że zarówno suma jak i iloczyn wszystkich wydrukowanych liczb są równe 2022. Ania, Basia i Julka postanowiły policzyć, ile liczb zostało wydrukowanych. Ani wyszło 2021, Basi 2022, a Julce 2023 liczby. Tylko jedna z nich policzyła poprawnie. Która?

6. Babcia sprzedawała jajka na targu. Pierwszy klient kupił połowę wszystkich jajek i jeszcze jedno jajko, drugi klient kupił połowę pozostałych i jeszcze jedno jajko. Trzeci klient kupił połowę pozostałych i jeszcze jedno jajko. Wtedy babci pozostało już tylko 10 jajek. Ile jajek było na początku?

7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\angle CAB = 45°$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H. Bok BC ma długość 5. Jaka jest długość odcinka AH?

8. Do ośmiolitrowego dzbanka nalano do pełna soku. Jak w najmniejszej liczbie operacji podzielić sok po równo, mając do dyspozycji jeszcze tylko jedno trzylitrowe i jedno pięciolitrowe naczynie?

9. Uczniowie próbują podzielić się na grupy. Gdy ustawiają się czwórkami, ostatnia grupa była niekompletna - zostały 3 osoby. Gdy spróbowali ustawić się piątkami, znowu zostały 3 osoby. Sytuacja powtórzyła się, gdy spróbowali ustawić się siódemkami - w ostatniej grupie zostały 3 osoby. Ilu było uczniów, jeśli wiadomo, że było ich mniej niż 200?

10. Na kartce napisano 40 liczb. Średnia z wszystkich liczb jest równa 40, a średnia z pierwszych trzydziestu liczb 30. Ile wynosi średnia z pozostałych 10 liczb?

1. **Tak.** Średnia arytmetyczne trzech liczb jest liczbą całkowitą, gdy ich suma jest podzielna przez 3. Każda z pięciu liczb ma resztę z dzielenia przez 3 - 0, 1 lub 2. Suma trzech liczb jest podzielna przez 3, gdy wszystkie mają tą samą resztę lub mamy zestaw (0, 1, 2). Załóżmy, że wśród czterech liczb nie ma trójki liczb o sumie podzielnej przez 3. Bez straty ogólności możemy założyć, że w takim razie liczby mają reszty kolejno 0, 0, 1, 1. Jeśli piąta liczba ma resztę 0 lub 1, to mamy trójkę liczb o tych samych resztach. Jeśli zaś piąta liczba ma resztę 2, to otrzymujemy trójkę liczb o resztach 0, 1, 2.
2. **Można ułożyć 14 trójkątów.** Szukamy trójkątów o sumie długości boków równej 23, bokach będących liczbami całkowitymi i spełniających warunek trójkąta. Suma dwóch dowolnych boków musi więc wynosić przynajmniej 12. Pasują więc trójki (1,11,11), (2,10,11), (3,9,11), (3,10,10), (4,8,11), (4,9,10), (5,7,11), (5,8,10), (5,9,9), (6,6,11), (6,7,10), (6,8,9), (7,7,9), (7,8,8).
3. **52 lub 53.** Każdy rok ma 52 pełne tygodnie, więc czwartków musi być przynajmniej tyle. Jeśli pierwszy stycznia był w piątek, to piątków będzie 53, a czwartków 52. Jeśli pierwszy stycznia w roku przestępnym był w czwartek, to i czwartków i piątków jest 53. (365=1+52*7 dzień roku to znowu czwartek i 366 to piątek).
4. Oznaczmy odległość przystanku od pierwszego bloku jako x. Wtedy suma odległości, które mieszkańcy będą mieli do przejścia wynosi: $100x + 150(250 - x) = 37500 - 50x$. Zauważamy, że odległość maleje wraz ze wzrostem wartości x, która maksymalnie może wynosić 250m. Stąd wniosek, że **przystanek powinien być zbudowany dokładnie przed wejściem do drugiego bloku.**
5. **Dobrze policzyła Ania.** Skoro jedną z liczb jest liczba 2022, a iloczyn wszystkich liczb wynosi również 2022, to każda z pozostałych liczb może wynosić tylko -1 lub 1. Co więcej, -1 musi występować parzyście wiele razy, aby iloczy był dodatni. Ponieważ suma wszystkich liczb wynosi 2022, to jedynek musi być tyle samo, co minus jedynek. Zatem na kartce mamy wydrukowane: „2022”, $2n$ jedynek i $2n$ minus jedynek, gdzie n to pewna liczba naturalna. Stąd wszystkich liczb było $1+4n$, a w takiej postaci możemy wyrazić tylko 2021. Czyli Ania policzyła poprawnie.
6. **Na początku były 94 jajka**. Gdy trzeci klient kupił połowę pozostałych jajek, zostało ich 11 (10 pozostałych na sam koniec i jedno dodatkowo kupione przez trzeciego klienta). Oznacza to, że po wizycie drugiego klienta zostały 22 jajka. Analogicznie obliczamy, że po wizycie pierwszego klienta zostało $2 \cdot (22+1) = 46$ jajek, a na początku były $2 \cdot (46+1) = 94$ jajka.
7. **5.** Oznaczmy spodki wysokości poprowadzonej z C jako D i z B jako E. Trójkąt ADB jest równoramienny, oznaczmy $x = |AD| = |DC|$. Trójkąt DBH również jest równoramienny i $y = |DB| = |DH|$. $|AH|^2 = x^2 + y^2$. Ale $x^2 + y^2 = |BC|^2 = 5^2 = 25$. Stąd |AH|=5.
8. Maksimum punktów przyznajemy dla poprawnego rozwiązania wykonującego 6 lub mniej operacji. Za każdą dodatkową operację odejmujemy 3 pkt. Propozycja rozwiązania z 6 operacjami: liczby obrazują napełnienie kolejno ośmio, pięcio i trzylitrowego naczynia. (8,0,0), (3,5,0), (6,2,0), (6,0,2), (1,5,2), (1,4,3).
9. **143.** Rozważmy uczniów poza trójką, która zostaje przy każdym ustawieniu. Liczba ta podzielna jest jednocześnie przez 4, 5 i 7. Najmniejsza wspólna wielokrotność to 140, następna wielokrotność jest już większa niż 200. Czyli wszystkich uczniów jest 143 (po dodaniu „pozostawionej” trójki).
10. **70.** Suma wszystkich liczb wynosi $40 \cdot 40 = 1600$. Suma pierwszych 30 wynosi $30 \cdot 30 = 900$, zatem suma pozostałych 10 to $1600 - 900 = 700$. Czyli średnia wynosi $700 : 10 = 70$.