Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

**Mecz finałowy** (licea)

**1.** Udowodnij, że
$$\sum_{i=1}^{k-1} i(k-i)\binom{100}{i}\binom{100}{k-i} = 10000\binom{198}{k-2}$$
dla dowolnego $k \in \{2, \ldots, 100\}$.

**2.** Dla jakich $a \in \mathbb{R}_+$ równanie $(a+3)^{\sin 15x + \sin 209x} = a^{\cos 3x + \cos 5x}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań?

**3.** Adam i Mateusz grają w grę. Gra składa się z dokładnie jednej rundy, w której Adam rzuca uczciwą kością dwudziestościenną, a Mateusz rzuca trzema niezależnymi uczciwymi kośćmi sześciennymi. Wygrywa ten, który uzyska sumarycznie więcej oczek. Czy Adam i Mateusz mają równe szanse na wygraną?

**4.** Ile jest dodatnich czterocyfrowych liczb całkowitych, które są podzielne przez sześcian swojej sumy cyfr?

**5.** Czy istnieje wielościan $\mathcal{W}$ taki, że dla każdej liczby naturalnej $n$ liczba $n$-kątnych ścian $\mathcal{W}$ jest równa 0 lub 2?

**6.** Dana jest góra o wysokości $H$, a w $\frac{2}{3}$ jej wysokości alpinista, który chce wejść na szczyt. Każdego dnia alpinista z równym prawdopodobieństwem, niezależnie od poprzednich dni, albo zwiększa swoją wysokość o $\frac{H}{4n^2}$, albo zmniejsza swoją wysokość o $\frac{H}{4n^2}$, gdzie $n$ jest numerem dnia wyprawy (zaczyna się od dnia o numerze 1).

Z jakim prawdopodobieństwem alpinista osiągnie szczyt w ciągu co najwyżej siedmiu dni?

**7.** Wewnątrz kwadratu o boku długości 1 narysowano figurę $\mathcal{F}$ taką, że żadne dwa punkty tej figury nie są odległe o dokładnie $\frac{1}{2023}$. Udowodnij, że pole tej figury (jeżeli istnieje) nie przekracza $\frac{3}{10}$.

**8.** Niech $A$, $B$, $C$, $D$ będą parami różnymi punktami przecięcia krzywych
$$\{(x,y) : x = (y-1)^2 - 1\} \text{ oraz } \{(x,y) : y = (x-1)^2 - 1\}.$$
Wyznacz pole czworokąta wypukłego $ABCD$.

**9.** Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ takie, że dla wszystkich nieujemnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość
$$f(x + \sqrt{y}) = f(y + \sqrt{x}).$$

**10.** Dana jest liczba naturalna $n$ oraz zbiór zbiorów $\mathcal{V}$ zawierający dokładnie $m$ zbiorów ciągów długości $n$, każdy postaci $V_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{a_i} + x_{b_i} + x_{c_i} = 0\}$ dla $a_i \neq b_i \neq c_i \neq a_i$.

O ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ powiemy, że jest $\mathcal{V}$-*niegraniczny*, jeżeli nie należy do żadnego zbioru z $\mathcal{V}$.

O dwóch $\mathcal{V}$-niegranicznych ciągach $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ powiemy, że są $\mathcal{V}$-*połączone*, jeżeli dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zachodzi równoważność
$$x_{a_i} + x_{b_i} + x_{c_i} > 0 \iff y_{a_i} + y_{b_i} + y_{c_i} > 0.$$

Udowodnij, że dowolny zbiór $\mathcal{V}$-niegranicznych parami nie-$\mathcal{V}$-połączonych ciągów długości $n$ ma co najwyżej
$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} + \cdots + \binom{m}{0}$$
elementów.

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

**Rozwiązania meczu finałowego** (licea)

**1.** Zauważmy, że obie strony równania mają tę samą interpretację kombinatoryczną.

Lewą stronę możemy zinterpretować w następujący sposób: z każdego z dwóch zbiorów stuelementowych wybieramy odpowiednio $i$, a następnie $k-i$ elementów i wyróżniamy jeden element z pierwszego zbioru (mamy $i$ sposobów na taki wybór), a następnie z drugiego (mamy $k-i$ sposobów).

Po prawej stronie najpierw wyróżniamy dwa elementy z obu zbiorów stuelementowych, a następnie dobieramy pozostałe $k-2$ elementów.

Obie interpretacje odpowiadają temu samemu obiektowi kombinatorycznemu, co kończy dowód równości.

**2.** Niech $f(x) = (a+3)^{\sin 15x + \sin 209x} - a^{\cos 3x + \cos 5x}$. Zauważmy, że jest to funkcja $2\pi$-okresowa, oraz że $f(0) = 1 - a^2$, $f(\pi) = 1 - a^{-2}$. Zauważmy, że te dwie liczby są różnych znaków lub obie równe 0, gdy $a = 1$.

Z ciągłości funkcji $f$ mamy, że dla każdego przedziału $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, funkcja $f$ ma przynajmniej jedno miejsce zerowe, zatem równanie z zadania ma nieskończenie wiele rozwiązań dla dowolnego $a \in \mathbb{R}_+$.

**3.** Tak. Skoro każda konfiguracja wyników Adama i Mateusza jest równie prawdopodobna, to istnienie bijekcji między konfiguracjami, w których Adam wygrywa i konfiguracjami, w których Adam przegrywa oznacza, że prawdopodobieństwa tych dwóch zdarzeń są równe.

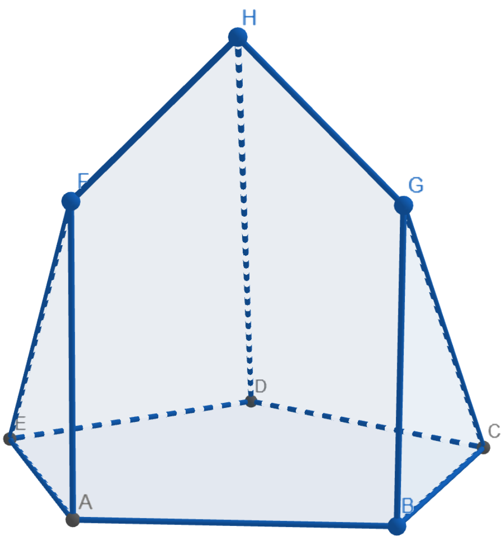
Domniemana bijekcja może być postaci $(a, m_1, m_2, m_3) \mapsto (21 - a, 7 - m_1, 7 - m_2, 7 - m_3)$, gdzie $a$ jest wynikiem z kości Adama, a $m_i$ są wynikami z kości Mateusza.

**4.** Wszystkie rozwiązania to $1000, 2000, 2401, 4913, 5000, 5103, 5120, 5832$, a zatem odpowiedź na zadanie to 8.

Celem zadania nie jest bycie rozwiązanym jedną sprytną obserwacją, a kilkoma optymalizacjami w przeglądaniu wszystkich liczb czterocyfrowych. Oto kilka z nich:

- Jest mało czterocyfrowych liczb o sumie cyfr równej 1 lub 2 (tzn. $1000, 1001, 1010, 1100, 2000$).
- Liczby o sumie cyfr podzielnej przez 3, ale niepodzielnej przez 9 nie są rozwiązaniami, bo z założenia muszą być podzielne przez 27, a więc przez 9, czyli muszą mieć sumę cyfr podzielną przez 9.
- Jest mało czterocyfrowych liczb podzielnych przez $4^3$ o sumie cyfr równej 4, bo ostatnie dwie cyfry mogą być wyłącznie zerami.
- Jest mało czterocyfrowych liczb podzielnych przez $5^3$ o sumie cyfr równej 5, bo ostatnie trzy cyfry mogą być wyłącznie zerami.
- Jest relatywnie mało czterocyfrowych liczb podzielnych przez sześcian liczby większej lub równej 7, ponieważ $10000/7^3 + 10000/8^3 + \cdots \approx 120$.
- Liczby o sumie cyfr większej lub równej 22 nie są rozwiązaniami, bo $22^3 = 10648 > 9999$.

**5.** Tak, istnieje. Oto jeden z przykładów:




**6.** Na początek zauważmy, że

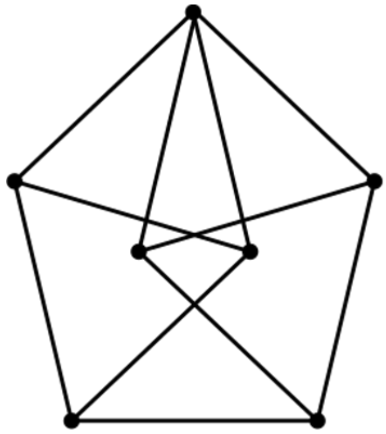
$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{7^2} < \frac{5}{3}.$$

Rozważmy probabilistyczne drzewo wyboru, w którym każdy poziom będzie odpowiadał wyborowi podjętemu kolejnego dnia.

- Jeżeli pierwszego dnia alpinista zmniejszy swoją wysokość, to po zmniejszeniu będzie w $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ wysokości góry, a więc żaden ciąg wyborów nie zaprowadzi go już na szczyt, ponieważ
$$1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12} > \frac{2}{12} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{3} - 1\right).$$
Wobec tego, jeżeli alpinista wejdzie na szczyt, to pierwszego dnia zmieni swoją wysokość z $\frac{2}{3}$ wysokości góry na $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$ wysokości góry.
- Jeżeli drugiego dnia alpinista zmniejszy swoją wysokość, to po zmniejszeniu będzie w $\frac{11}{12} - \frac{1}{16} = \frac{41}{48}$ wysokości góry, a więc żaden ciąg wyborów nie zaprowadzi go już na szczyt, ponieważ
$$1 - \frac{41}{48} = \frac{7}{48} > \frac{5}{48} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{3} - 1 - \frac{1}{4}\right).$$
Wobec tego, jeżeli alpinista wejdzie na szczyt, to drugiego dnia zmieni swoją wysokość z $\frac{11}{12}$ wysokości góry na $\frac{11}{12} + \frac{1}{16} = \frac{47}{48}$ wysokości góry.
- Jeżeli trzeciego dnia alpinista zwiększy swoją wysokość, to po zwiększeniu będzie w $\frac{47}{48} + \frac{1}{36} = \frac{141+4}{144} = \frac{145}{144}$ wysokości góry, a więc osiągnie szczyt, co kończy tę gałąź drzewa probabilistycznego z prawdopodobieństwem $\boldsymbol{\frac{1}{8}}$.
- Jeżeli trzeciego dnia alpinista zmniejszy swoją wysokość, to po zmniejszeniu będzie w $\frac{47}{48} - \frac{1}{36} = \frac{141-4}{144} = \frac{137}{144}$ wysokości góry.
- Niezależnie od wyborów alpinisty w kolejnych dniach nie osiągnie on szczytu do siódmego dnia, ponieważ
$$\frac{137}{144} + \frac{1}{4 \cdot 4^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 6^2} + \frac{1}{4 \cdot 7^2} = \frac{156659}{158400} < 1.$$

Wobec tego odpowiedź na zadanie to $\frac{1}{8}$.

**7.** Rozważmy figurę $\mathcal{M}$ przedstawioną poniżej, w której każda zaznaczona krawędź ma długość $\frac{1}{2023}$.



Niech wektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_7}$ będą wektorami zaczynającymi się w położonym najwyżej punkcie $\mathcal{M}$ i kończącymi się w parami różnych zaznaczonych wierzchołkach $\mathcal{M}$.

Załóżmy nie wprost, że figura $\mathcal{F}$ ma pole większe niż $\frac{3}{10}$ i rozważmy figury $\mathcal{F}_i = \mathcal{F} + \vec{v_i}$ dla $i \in \{1, \ldots, 7\}$. Oczywistym jest, że pola tych figur są wszystkie równe polu figury $\mathcal{F}$.

Te figury są w pełni zawarte w kwadracie $[-1/2023, 1 + 1/2023] \times [-2/2023, 1]$, a ponadto suma ich pól przekracza $\frac{21}{10}$. Wobec tego, skoro

$$\frac{21}{10} > 2 \cdot (\text{pole kwadratu } [-1/2023, 1 + 1/2023] \times [-2/2023, 1]),$$

to istnieje punkt $P$ należący do trzech spośród figur $\mathcal{F}_i$, bez straty ogólności niech będą to $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$.

Z definicji figur $\mathcal{F}_i$ i punktu $P$ wynika, że punkty $P - \vec{v_1}, P - \vec{v_2}, P - \vec{v_3} \in \mathcal{F}$ tworzą podzbiór zaznaczonych wierzchołków (potencjalnie poddanej translacji) figury $\mathcal{M}$.

Skoro wśród każdych trzech zaznaczonych wierzchołków figury $\mathcal{M}$ istnieje para odległa o $\frac{1}{2023}$, to również wśród punktów $P - \vec{v_1}, P - \vec{v_2}, P - \vec{v_3} \in \mathcal{F}$ istnieje taka para, co przeczy więzom nałożonym na figurę $\mathcal{F}$.

**8.** Na pierwszy rzut oka widać, że wśród punktów przecięcia będą $(0, 0)$ i $(3, 3)$. Następnie możemy rozwiązać układ równań określający przecięcia krzywych przez podstawienie; uzyskujemy

$$x = (\underbrace{(x-1)^2 - 1}_{y} - 1)^2 - 1,$$

a więc równoważnie

$$\begin{aligned} x &= (x^2 - 2x - 1)^2 - 1 \\ x &= (x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 - 2x^2) - 1 \\ 0 &= x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 3x. \end{aligned}$$

Skoro wiemy, że rozwiązaniami tego równania są $x = 0$ i $x = 3$, to możemy znaleźć w tymże wielomianie czynnik $x(x - 3)$ i otrzymujemy

$$x(x-3)(x^2 - x - 1) = 0,$$

a stąd już w oczywisty sposób otrzymujemy pozostałe rozwiązania: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Wobec tego wyznaczyliśmy wierzchołki czworokąta, którego pole chcemy obliczyć: $(0, 0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $(3, 3)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Teraz wystarczy użyć dowolnego wzoru na obliczenie pola wielokąta w układzie współrzędnych (my skorzystamy z długości przekątnych w deltoidzie $ABCD$), by uzyskać wynik

$$S = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{5}.$$

**9.** Odpowiedzią są wszystkie funkcje, które są postaci $f(x) = \begin{cases} a, & x = 0, \\ b, & x > 0. \end{cases}$

Najpierw ograniczmy klasę rozwiązań. Ustalmy dowolną liczbę dodatnią $p$ i rozważmy zbiór par $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R}_{\geqslant 0} : x + \sqrt{y} = p\}$. Zauważmy, że zbiór $P$ jest ciągłą krzywą na płaszczyźnie, $(p, 0) \in P$ oraz $(0, p^2) \in P$.

Stąd, dla dowolnego punktu $(x, y) \in P$ mamy

$$f(p) = f(x + \sqrt{y}) = f(y + \sqrt{x}).$$

Wyznaczmy teraz zbiór wartości wyrażenia $y + \sqrt{x}$ dla $(x, y) \in P$.

Istnieje punkt $(p, 0) \in P$ taki, że $y + \sqrt{x} = \sqrt{p}$ oraz istnieje punkt $(0, p^2) \in P$ taki, że $y + \sqrt{x} = p^2$. Skoro $P$ jest ciągłą krzywą, to wyrażenie $y + \sqrt{x}$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między $\sqrt{p}$ a $p^2$.

Wobec tego dla każdego $p \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ szukana funkcja jest stała na odcinku $[p, p^2]$.

Rozważmy ciąg punktów $(\ldots, 2^{-8}, 2^{-4}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{-1/2}, 2^{-1/4}, 2^{-1/8}, \ldots)$. Stosując uzyskany wyżej lemat dla punktów z tego ciągu wnioskujemy, że szukana funkcja jest stała na $(0, 1)$. Rozważając ciąg punktów $(\ldots, 2^{1/8}, 2^{1/4}, 2^{1/2}, 2^1, 2^2, 2^4, 2^8, \ldots)$ uzyskujemy stałość szukanej funkcji na $(1, +\infty)$.

Niech $x = \frac{1}{2}$ i $y = \frac{1}{4}$. Podstawiając te wartości do zadanego równania otrzymujemy

$$f(1) = f(x + \sqrt{y}) = f(y + \sqrt{x}) = f\left(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}}_{<1}\right).$$

Podobnie, dla $x = \frac{1}{4}$ i $y = \frac{9}{16}$ otrzymujemy

$$f(1) = f(x + \sqrt{y}) = f(y + \sqrt{x}) = f\left(\underbrace{\frac{9}{16} + \frac{1}{2}}_{>1}\right).$$

Wobec tego otrzymaliśmy „połączenie" wartości szukanej funkcji ze zbiorów argumentów $(0, 1)$, $\{1\}$ i $(1, +\infty)$.

Sprawdzenie, że postulowane przez nas rozwiązania faktycznie spełniają zadane równanie sprowadza się do obserwacji, że wśród par liczb nieujemnych jest tylko jedna para $(x, y)$, dla której $x + \sqrt{y} = 0$ i jest to $(0, 0)$.

**10.** Niech $f(m, n)$ oznacza wielkość największego zbioru parami $\mathcal{V}$-niegranicznych nie-$\mathcal{V}$-połączonych ciągów długości $n$, jeżeli $\mathcal{V}$ liczy $m$ zbiorów.

Pokażemy, że dla dowolnych $m$ i $n$ zachodzi nierówność

$$f(m + 1, n + 1) \leqslant f(m, n + 1) + f(m, n).$$

Rozważmy przestrzeń ciągów długości $n + 1$ i prześledźmy jak może się zmienić wartość $f$, gdy zwiększymy $m$ o 1, dodając do $\mathcal{V}$ zbiór $D$. Dodanie do $\mathcal{V}$ kolejnego zbioru sprawia, że niektóre klasy abstrakcji relacji $\mathcal{V}$-połączenia zostaną podzielone na dwie części.

Zauważmy, że każda klasa abstrakcji wyznaczana przez oryginalne $\mathcal{V}$, która została podzielona przez $D$ wyznacza (po odpowiednim zrzutowaniu) klasę abstrakcji wewnątrz zbioru $D$. Liczba klas abstrakcji po zrzutowaniu na $D$ nie przekracza $f(m, n)$, ponieważ możemy utożsamić $D$ z ciągami o jeden krótszymi niż ciągi z oryginalnej przestrzeni ciągów.

Wobec tego dodanie $D$ do $\mathcal{V}$ może zwiększyć liczbę klas abstrakcji relacji $\mathcal{V}$-połączenia o co najwyżej $f(m, n)$, a więc postulowana zależność rekurencyjna zachodzi.

Teraz wystarczy pokazać, że przyjęcie

$$f(m,n) = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} + \cdots + \binom{m}{0}$$

spełnia warunki początkowe i zależność rekurencyjną.

Oczywistym jest, że tak wybrane $f$ spełnia warunki początkowe typu $f(0,n) = 1$. Mniej oczywistym, ale nadal nietrudnym jest, że z własności dwumianu Newtona mamy

$$\begin{aligned} f(m+1,n+1) &= \binom{m+1}{n+1} + \binom{m+1}{n} + \cdots + \binom{m+1}{0} \\ &= \left(\binom{m}{n+1} + \binom{m}{n}\right) + \left(\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}\right) + \cdots + \binom{m}{0} \\ &= \left(\binom{m}{n+1} + \binom{m}{n} + \cdots + \binom{m}{0}\right) + \left(\binom{m}{n} + \binom{m}{n-1} + \cdots + \binom{m}{0}\right) \\ &= f(m,n+1) + f(m,n). \end{aligned}$$