Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Półfinał (licea)

1. Palindromem nazywamy dodatnią liczbę całkowitą, której zapis dziesiętny czytany od lewej strony wygląda tak samo jak czytany od prawej strony, np. 2023202. Znajdź wszystkie czterocyfrowe palindromy, które mogą być zapisane jako suma dwóch trzycyfrowych palindromów.

2. Niech ABC będzie takim trójkątem, że $|AB| > |AC|$. Ponadto niech D oznacza taki punkt na boku AB, że $|AD| = |AC|$. Wykaż, że $|BC| > |CD|$.

3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia równanie $f(x-1) + xf(3-x) = x$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz $f(2)$.

4. Dana jest niezerowa liczba rzeczywista a. Czy istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia m, że odległość punktu $(1, a)$ od wykresu funkcji $f(x) = \log_m x$ jest najmniejsza?

5. Czy poniższy układ równań ma rozwiązanie z dodatnimi x, y, z? Uzasadnij, podając pewne rozwiązanie tego układu lub wyjaśniając, dlaczego nie ma on żadnych rozwiązań.

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ \frac{xyz}{xy+yz+xz} = \frac{10}{3} \\ x^2y + y^2z + z^2x = 9(x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$$

6. Oblicz objętość równoległościanu, którego wszystkie ściany są rombami o bokach długości a i kątach ostrych o mierze α.

7. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4 zachodzi nierówność

$$\frac{x_1 + x_4}{x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4} + \frac{x_2 + x_1}{x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_1} + \frac{x_3 + x_2}{x_3 + 2x_4 + 2x_1 + x_2} + \frac{x_4 + x_3}{x_4 + 2x_1 + 2x_2 + x_3} \geqslant \frac{4}{3}.$$

8. Mały Jaś ma pudełko z klockami w pięciu kolorach – czerwonym, zielonym, niebieskim, żółtym i białym. Postanowił on zbudować wieżę z 2023 klocków stawiając je jeden na drugim w taki sposób, że:

   - klocek na spodzie wieży nie może być biały;
   - bezpośrednio na klocku w kolorze czerwonym, zielonym, niebieskim lub żółtym nie może znajdować się klocek w tym samym kolorze;
   - pomiędzy dwoma klockami w tym samym niebiałym kolorze nie może znajdować się blok składający się wyłącznie z białych klocków.

   Na ile sposobów Jaś może zbudować wieżę, zakładając, że nie skończą mu się klocki w żadnym z kolorów?

9. Wyznacz wszystkie trójki parami różnych liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^5 - a = b^5 - b \\ b^5 - b = c^5 - c \\ |a| + |b| + |c| = 2. \end{cases}$$

10. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność

$$x^2 + 2\pi x \geq \pi(x + \sin x).$$

1. Niech $\overline{abba}$ będzie szukanym palindromem. Ponieważ suma dwóch trzycyfrowych liczb nie przekracza 1998, więc $a = 1$. Niech $\overline{1bb1} = \overline{cdc} + \overline{xyx}$. Wtedy
$$1001 + 110b = 101(c + x) + 10(d + y).$$
Ostatnia cyfra lewej strony to 1, więc ostatnia cyfra $c + x$ to również 1. Skoro $1 \leq c,\ x \leq 9$, to $c + x = 11$. Po wstawieniu i uproszczeniu powyższego wyrażenia dostajemy
$$11(b - 1) = d + y.$$
Prawa strona tej równości nie przekracza 18, więc $b - 1$ jest równe 0 lub 1. Obie opcje są możliwe: $1111 = 505 + 606$, $1221 = 565 + 656$.

2. Skoro $|AC| = |AD|$, to ACD jest trójkątem równoramiennym o podstawie CD, zatem kąt $\sphericalangle ADC$ jest kątem ostrym. Wiemy stąd, że $\sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle ADC > 90^\circ$, czyli kąt $\sphericalangle BDC$ jest rozwarty. Z faktu, że w trójkącie najdłuższy bok leży naprzeciwko kąta o największej mierze wnioskujemy, że BC.

3. Podstawiając $x = 3$, a następnie $x = 1$, otrzymujemy następujący układ równań:
$$\begin{cases} f(2) + 3f(0) = 3 \\ f(0) + f(2) = 1 \end{cases}.$$
Stąd mamy $f(0) = 1 - f(2)$, a zatem po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy $f(2) = 0$.

4. Pokażemy, że takie m nie istnieje. Zauważmy, że $(1, a)$ nigdy nie należy do wykresu funkcji f, bo $\log_m 1 = 0 \neq a$. Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$. Wtedy, możemy rozwiązać następujące równanie:
$$f(1 + \varepsilon) = \log_m(1 + \varepsilon) = a$$
$$m^a = 1 + \varepsilon$$
$$m = (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{a}}$$
Dla obliczonego w powyższy sposób odległość punktu $(1, a)$ od wykresu funkcji f możemy zatem oszacować z góry przez $1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$, czyli może być ona dowolnie małą liczbą dodatnią.

5. Przekształćmy powyższy układ równań w następujący sposób:
$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 10 \\ \frac{3xyz}{xy+yz+xz} = 10 \\ x^2y + y^2z + z^2x = 9(x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$$
Zauważmy, że pierwsze dwie równości zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z = 10$, ponieważ w pierwszym równaniu po lewej stronie mamy średnią arytmetyczną liczb x, y, z, a w drugim ich średnią harmoniczną. Możemy z tego skorzystać, bo uśredniane liczby są dodatnie. Podstawiając do trzeciego równania otrzymujemy $L = 3000 \neq 2700 = 9 \cdot 300 = P$, skąd otrzymujemy sprzeczność.

6. Niech $ABCD$ i $A'B'C'D'$ będą podstawami równoległościanu, a jego krawędziami bocznymi AA', BB', CC' i DD'. Niech kąty ostre rombów w podstawach będą przy wierzchołkach A, B, A' i B'. Rozważmy ostrosłup $ABDA'$. Z twierdzenia cosinusów $|A'B|^2 = a^2(1-\cos\alpha)$. Zauważamy, że trójkąt $A'BD$ jest równoboczny. Wtedy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}.$$

Zauważmy, że rozważany ostrosłup $ABDA'$ jest prawidłowy, bo krawędzie AB, AA' i AD są równej długości. Wtedy spodek wysokości tego ostrosłupa opuszczonej z wierzchołka A jest też środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A'BD$. Oznaczmy długość tej wysokości jako h. Wtedy

$$h^2 = a^2 - \frac{2}{3}(1-\cos\alpha)a^2 = a^2\left(1-\frac{2}{3}\cos\alpha\right) = \frac{a^2(1+2\cos\alpha)}{3}.$$

Oznaczmy długość wysokości opuszczonej z A' tego ostrosłupa będącej zarazem wysokością całego równoległościanu jako H, a pole $ABCD$ jako P_p. Zatem mamy

$$V_{ABDA'} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot P_pH = \frac{1}{3}\cdot\frac{2a^2(1-\cos\alpha)\cdot a\sqrt{1+2\cos\alpha}}{4\sqrt{3}}$$
$$V_{ABCDA'B'C'D'} = P_pH = a^3(1-\cos\alpha)\sqrt{1+2\cos\alpha}.$$

7. Pokażemy najpierw następujący lemat:

Lemat: Dla dowolnych dodatnich liczb s, t zachodzi nierówność:

$$\frac{s}{t}+\frac{t}{s}\geqslant 2.$$

Dowód: Istotnie taką nierówność możemy przekształcić równoważnie:

$$s^2+t^2\geqslant 2st$$
$$s^2-2st+t^2\geqslant 0$$
$$(s-t)^2\geqslant 0,$$

co kończy dowód lematu.

Zastosujmy teraz podstawienie

$$a = x_1+2x_2+2x_3+x_4,\quad b = x_2+2x_3+2x_4+x_1,\quad c = x_3+2x_4+2x_1+x_2,\quad d = x_4+2x_1+2x_2+x_3.$$

Zauważmy, że wówczas mamy

$$x_1+x_4 = \frac{2}{3}c-\frac{1}{3}a,\qquad x_2+x_1 = \frac{2}{3}d-\frac{1}{3}b,\qquad x_3+x_2 = \frac{2}{3}a-\frac{1}{3}c,\qquad x_4+x_3 = \frac{2}{3}b-\frac{1}{3}d,$$

zatem nierówność z treści zadania przekształci się do postaci:

$$\frac{2c/3-a/3}{a}+\frac{2d/3-b/3}{b}+\frac{2a/3-c/3}{c}+\frac{2b/3-d/3}{d}\geqslant\frac{4}{3}. \qquad (\star)$$

Porządkując wyrazy dostajemy:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\right)-\frac{4}{3}\geqslant\frac{4}{3}$$
$$\frac{2}{3}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\right)\geqslant\frac{8}{3}$$
$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\geqslant 4.$$

Na mocy lematu mamy jednak $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geqslant 2$ oraz $\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\geqslant 2$, stąd nierówność $(\star)$ jest prawdziwa dla dowolnych dodatnich a, b, c, d, stąd nierówność z treści zadania również jest prawdziwa dla dowolnych dodatnich x_1, x_2, x_3, x_4.

8. Zauważmy, że spodni klocek wieży możemy wybrać na 4 sposoby.

   Załóżmy teraz, że mamy już zbudowaną wieżę z n klocków i zastanówmy się na ile sposobów możemy dołożyć do niej $(n+1)$-szy klocek. Jeśli klocek n-ty jest w jednym z kolorów czerwony, zielony, niebieski lub żółty, to wtedy klocek $(n+1)$-szy można wybrać na 4 sposoby: może być biały albo może być w jednym z trzech kolorów różnym od koloru klocka n-tego. Jeśli natomiast klocek n-ty jest biały, to wtedy klocek $(n+1)$-szy również można wybrać na 4 sposoby: może być biały albo może być w jednym z trzech kolorów różnych od koloru najwyższego niebiałego klocka dołożonego już do wieży.

   Zatem jeśli budujemy wieżę od spodu, to każdy klocek możemy wybrać na 4 sposoby, więc wieżę spełniającą warunki zadania Jaś może zbudować na 4^{2023} sposobów.

9. Zdefiniujmy zbiór *kandydatów na rozwiązania*, czyli takich uporządkowanych trójek (a,b,c), które spełniają dwa pierwsze równania układu. Formalnie niech

$$\mathcal{K} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a^5 - a = b^5 - b = c^5 - c, a < b < c\}.$$

   Możemy w naturalny sposób każdemu elementowi $(a,b,c) \in \mathcal{K}$ przyporządkować jego *indeks*, czyli wspólną wartość $a^5 - a = b^5 - b = c^5 - c$.

   Zapiszmy kilka lematów wyrażonych w terminach indeksu, które doprowadzą nas do rozwiązania.

   Lemat 1. Jeżeli indeks kandydata jest większy lub równy $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^5$, to ten kandydat nie jest rozwiązaniem.

   Dowód: Wyznaczmy przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^5 - x$. Wówczas łatwo zauważymy, że jeżeli indeks kandydata jest większy lub równy $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^5$, to największy element takiego kandydata jest większy od 1, a dwa mniejsze elementy kandydata są mniejsze lub równe $-\frac{1}{2}$, stąd suma modułów jest większa od 2 wbrew trzeciemu równaniu danego układu równań.

   Lemat 2. Jeżeli indeks kandydata jest z przedziału $\left(0, \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)$, to ten kandydat nie jest rozwiązaniem.

   Dowód: Dla dowolnych $a < b < 0$, dla których $f(a) = f(b)$ zachodzą równości

$$a + 1 + b = f(a) \cdot \frac{a+1}{f(a)} + f(b) \cdot \frac{b}{f(b)} = f(a) \cdot \frac{a - (-1)}{f(a) - f(-1)} + f(b) \cdot \frac{b - 0}{f(b) - f(0)}$$

   Z twierdzenia Lagrange'a wynika, że istnieją takie liczby p i q, że $p \in [-1, a]$ i $q \in [b, 0]$, dla których

$$\frac{a - (-1)}{f(a) - f(-1)} = 1/f'(p) \quad \text{oraz} \quad \frac{b - 0}{f(b) - f(0)} = 1/f'(q).$$

   Skoro $f'[[-1, -4/5]] \subseteq (1, 4]$ oraz $f'[[-1/2, 0]] = [-1, -11/16]$, to możemy stąd wywnioskować, że

$$a + b = \frac{f(a)}{f'(p)} + \frac{f(b)}{f'(q)} - 1 = f(a) \left(\underbrace{\frac{1}{f'(p)} + \frac{1}{f'(q)}}_{<0} \right) - 1 < -1,$$

   a więc skoro $a < b < 0$, to wtedy

$$|a| + |b| + |c| = \underbrace{-a - b}_{>1} + \underbrace{c}_{>1} > 1 + 1 = 2.$$

   Lemat 3. Jeżeli indeks kandydata jest równy 0, to jest on rozwiązaniem.

   Dowód: Zauważmy, że jedyny kandydat o indeksie 0 to $(-1, 0, 1)$ i łatwo sprawdzić, że jest to rozwiązanie.

   Lemat 4. Trójka (a,b,c) jest rozwiązaniem układu wtedy i tylko wtedy, gdy trójka $(-c, -b, -a)$ jest rozwiązaniem układu.

   Dowód: Wystarczy zauważyć, że przekształcenie $(a,b,c) \mapsto (-c, -b, -a)$ zachowuje porządek w obrębie trójki i zachowuje spełnianie wszystkich trzech równań układu.

   Podsumowanie: z lematów 1, 2 i 4 wynika, że jeżeli indeks kandydata jest różny od 0, to nie jest on rozwiązaniem, a z lematu 3 uzyskujemy jedynych sześć rozwiązań układu: $\{a,b,c\} = \{-1, 0, 1\}$.

10. Przekształćmy nierówność równoważnie do postaci

$$x^2 + \pi x \geq \pi \sin x.$$

Zauważmy, że poza przedziałem $[-2\pi, \pi/2]$ nierówność jest oczywista, bo wówczas $x^2 + \pi x \geq \pi$, a z własności sinusa wiemy, że $\pi \geq \pi \sin x$.

Równość w nierówności z treści zadania zachodzi, gdy $x \in \{-\pi, 0\}$. Pokażemy nierówności między pochodnymi obu stron na odpowiednich przedziałach. Niech $f(x) = x^2 + \pi x$ i $g(x) = \pi \sin x$. Na początek zauważmy, że

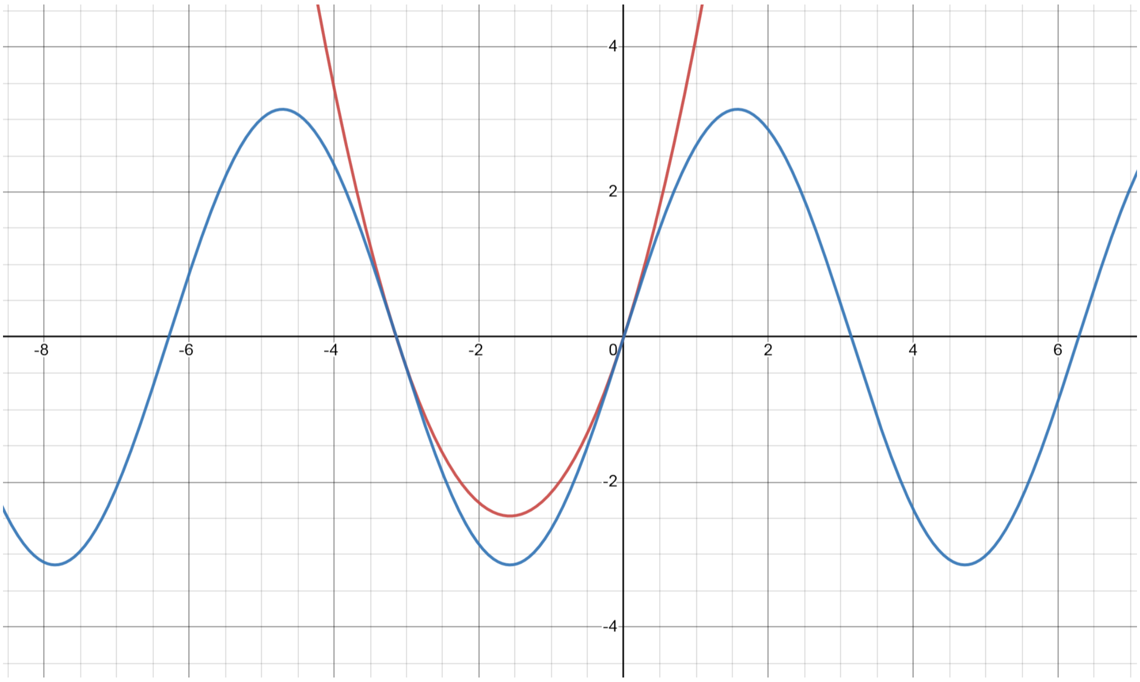
$$f'(x) = 2x + \pi \quad \text{oraz} \quad g'(x) = \pi \cos x.$$

Na przedziale $[-2\pi, -\pi]$ zachodzi nierówność $f'(x) \leq g'(x)$, ponieważ $2x + \pi \leq -\pi \leq \pi \cos x$.

Na przedziale $[-\pi, 0]$ zachodzi nierówność $f'(x) \geq g'(x)$, ponieważ funkcja g jest na tym przedziale wypukła, a wykres funkcji f to sieczna wykresu funkcji g przechodząca przez punkty $(-\pi, g(-\pi))$ i $(0, g(0)$.

Na przedziale $[0, \pi]$ zachodzi nierówność $f'(x) \leq g'(x)$, ponieważ funkcja g jest na tym przedziale wklęsła, a wykres funkcji f to sieczna wykresu funkcji g przechodząca przez punkty $(0, g(0)$ i $(\pi, g(\pi))$.

Konkludując, można łatwo zauważyć, że nierówności na pochodnych na podanych przedziałach i zgodności funkcji f i g w punktach $-\pi$ i 0 dają tezę.



Na czerwono funkcja $f(x) = x^2 + \pi x$, na niebiesko funkcja $g(x) = \pi \sin x$.