Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2023/24

Finał (klasy 4-6 SP)

1. Hania bardzo lubi liczby składające się z samych ósemek, takie jak 8 i 888. Czy da się zapisać liczbę 89880 jako sumę ulubionych liczb Hani tak, by żadnej nie użyć więcej niż raz?

2. Jakie cyfry należy wstawić w miejsce X i Y w liczbie

$$1102X79Y$$

aby była ona podzielna przez 88?

3. W poniższym kryptarytmie różne litery oznaczają różne cyfry. Jakie cyfry kryją sie pod literami?

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{K} & \mathrm{O} & \mathrm{K} & \mathrm{A} \\ + & \mathrm{K} & \mathrm{O} & \mathrm{L} & \mathrm{A} \\ \hline = & \mathrm{W} & \mathrm{O} & \mathrm{D} & \mathrm{A} \end{array}$$

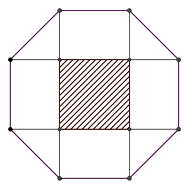
4. Pokaż, że czterdziestokąt foremny ma przekątną, która nie jest równoległa do żadnego z boków.

5. Klemens ma przed sobą siedem monet ułożonych orłem lub reszką do góry. Układ, który widzi przed sobą to

$$OORORRR.$$

Klemens może w jednym ruchu udwrócić dwie sąsiednie monety. Ile ruchów musi wykonać, aby otrzymać ułożenie, w którym żadne dwie sąsiednie monety nie są leżą tą samą stroną do góry? Czy na pewno nie da się zrobić tego w mniejszej liczbie ruchów?

6. Z kwadratu wycięto narożniki tak, że powstał ośmiokąt foremny. Pole zaznaczonego fragmentu wynosi 4. Jakie jest pole odciętych fragmentów?



7. Pewien chłopiec lubi sprawiać innym psikusy, dlatego czasami, gdy ktoś pyta go o imię, podaje mu inne, niż ma. Wiadomo, że w środy i czwartki zawsze mówi prawdę, w poniedziałki zawsze kłamie, a w pozostałe dni odpowiada jak chce. Czarek dla zabawy pytał go o imię przez siedem kolejnych dni. W pierwsze sześć dni kolejne odpowiedzi to: Antoni, Marek, Julek, Bartek, Antoni, Marek. Jak ma na imię chłopiec?

8. W bańce na mleko znajduje się nie mniej niż 10 litrów mleka. Babcia Pelagia chce zrobić masło, do czego potrzebuje dokładnie 6 litrów mleka. Czy może odmierzyć potrzebną ilość, korzystając z dziewięciolitrowego wiadra i pięciolitrowego dzbana?

9. Odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość równą krótszej podstawie. Oblicz sumę kątów przy dłuższej podstawie.

10. W klasie jest 30 uczniów. Tylko dwoje nie lubi ani matematyki, ani fizyki, ani biologii. W tej klasie 14 uczniów lubi matematykę, 15 fizykę, a 11 biologię. 6 uczniów za to lubi matematykę i fizykę, 5 fizykę i biologię, a 4 – matematykę i biologię. Ilu uczniów lubi wszysktie trzy przedmioty?

1. Nie da się – nie może użyć liczb większych niż 88888, tej natomiast użyć musi, bo suma wszystkich mniejszych jest zbyt mała. Pozostaje do wydania 992, więc nie użyje 8888. Suma

$$888 + 88 + 8 = 984$$

jest zbyt mała, by wydać pozostałą część.

Ocenianie. Należy zwrócić uwagę na uzasadnianie kroków rozumowania.

2. Rozkład 88 na czynniki pierwsze to

$$88 = 2^3 \cdot 11 = 8 \cdot 11.$$

Zatem liczba musi być podzielna zarówno przez 11, jak i 8. Z tego drugiego warunku dostajemy, że $Y = 2$, a z pierwszego $Y = X$.

Ocenianie. Za rozwiązanie polegające na rozpatrzeniu wszystkich przypadków przynajemy nie więcej niż 6 punktów. W sytuacji, gdy liczba przypadków jest znacząco zmniejszona(np. tylko do Y parzystych z parzystości liczby lub $Y = 2, 6$ z podzielności przez 4) można ocenę podwyższyć.

3. Pod A musi kryć się 0, pod O natomiast – 0 lub 9 w zależności od tego, czy z poprzedniej kolumny zaszło przeniesienie. Ponieważ nie może to być 0, to jest to 9 i do kolejnej kolumny jest przeniesienie, czyli W jest liczbą nieparzystą. Ponieważ K nie może być 0, a W nie może być 9, mamy trzy przypadki.

- $K = 1$, $W = 3$. W tym przypadku nie jest możliwe wygenerowanie przeniesienia do trzeciej kolumny ($L \neq 9$).
- $K = 2$, $W = 5$. W tym przypadku wygenerować przeniesienie do trzeciej kolumny tylko jeśli $L = 8$, ale wtedy $D = 0 = A$, sprzeczność.
- $K = 3$, $W = 7$. Ponieważ $L \neq 9, 7$, to żeby zaszło przeniesienie musi być $L = 8$. Wtedy $D = 1$. Mamy działanie
$$3930 + 3980 = 7910,$$
które jest poprawne (i pod różnymi literami są różne cyfry).

4. Czterdziestokąt ma parzystą liczbę boków, więc 20 kierunków boków. Na każdy z tych kierunków jest najwyżej 18 przekątnych równoległych (dwie przekątne z tego samego wierzchołka nie mogą być równoległe). Zatem równoległych przekątnych jest najwyżej

$$20 \cdot 18 = 360,$$

a wszystkich przekątnych

$$\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot (40 - 3) = 20 \cdot 37 > 20 \cdot 18,$$

więc któraś przekątna się nie jest równoległa do żadnego boku. Przekątne zliczamy tak: każdy wierzchołek możemy połączyć z każdym innym poza nim samym i sąsiadem, ale wtedy zliczamy przekątne podwójnie.

Ocenianie. Jeśli taka przekątna zostanie wskazana ręcznie, należy zwrócić uwagę na dokładne uzasadnienie, że nie jest równoległa do żadnego boku. Jeśli tego uzasadnienia brak lub zawiera **poważne** usterki, zadanie nie może być uznane za rozwiązanie.

5. Zauważmy, że wykonanie dwa razy tego samego ruchu nie zmienia ułożenia monet. Pondato zamiana dwóch kolejnych ruchów miejscami nie zmienia końcowego stanu planszy. W takim razie bez straty ogólności każdy ruch zostanie albo wykonany albo nie i to dokładnie raz, ponadto możemy je rozpatrywać od lewej do prawej. Mamy dwa przypadki na końcowy stan. Korzystamy z tego, że poza skrajnymi monetami stan danej monety zależy tylko od dwóch potencjalnych ruchów.

- Ułożenie *ORORORO*. Wtedy musimy wykonać kolejno ruchy na pozycjach 2, 4, a ruchy na pozycjach 1, 3, 5 zignorować.

$$OORORRR \to OROORRR \to ORORORR.$$

  Ruch na pozycji $5, 6$ zepsułby ułożenie, nie da się więc zrealizować tego przypadku.

- Ułożenie *ROROROR*. Musimy wykonać kolejno wszystkie ruchy na pozycjach 1,2,3,4,5.

$$OORORRR \to RRRORRR \to ROOORRR \to RORRRRR \to ROROORR \to ROROROR$$

6. Zaznaczony fragment to kwadrat o boku takim jak bok ośmiokąta, zatem bok ośmiokąta wynosi 2. Odcięte narożniki to połówki kwadratów o przekątnych 2 (przekątne tych kwadratów to boki ośmiokąta), ponieważ kwadrat jest rombem mamy łączne pole

$$4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 8.$$

7. Ponieważ w środę i czwartek chłopiec mówi prawdę, to w każdym tygodniu dwa dni pod rząd powinno być to samo imię. Wnioskujemy stąd, że albo pierwszy dzień z napisanych 6 to czwartek, albo ostatni to środa. W pierwszym przypadku miałby na imie Antoni, ale przedostatni podany dzień jest poniedziałkiem, kiedy chłopiec kłamie, więc ten przypadek jest sprzeczny. W drugim przypadku ma na imię Marek i takie rozwiązanie działa.

8. Babcia może sobie poradzić w sposób przedstawiony w poniższej tabeli (czas biegnie od lewej do prawej).

B	a	$a-5$	$a-5$	$a-10$	$a-10$	$a-1$	$a-1$	$a-6$	$a-6$
W	0	0	5	5	9	0	1	1	6
D	0	5	0	5	1	1	0	5	0

9. Niech $a < b$ – długości podstaw. Warunek z zadania daje

$$\frac{a+b}{2} = a \implies a = b,$$

więc trapez jest równoległobokiem i suma wynosi $180°$.

10. Uczniów lubiących któryś z przedmiotów jest 28. Jeśli dodamy liczby tych, którzy lubią poszczególne przedmioty, otrzymamy

$$14 + 15 + 11 = 40.$$

W tej sumie uczniów lubiących dokładnie dwa przedmioty policzyliśmy dwa razy, a tych, którzy lubią wszystkie trzy – trzy razy. Jeśli odejmiemy liczby dla par przedmiotów, skorygujemy liczenie podwójne, ale uczniów lubiących wszystkie trzy przedmioty odejmiemy trzy razy, więc znikną z sumy.

$$40 - 5 - 6 - 4 = 25.$$

Do 28 brakuje 3 uczniów i tyle własnie lubi wszystkie przedmioty.