Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2023/24

Eliminacje (klasy 4-6 SP)

1. W równoległoboku $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy niż bok BC. Punkt E jest środkiem boku CD. Oblicz miarę kąta $\sphericalangle AEB$.

2. Marek ma dwa zegary, które wczoraj o pewnej godzinie ustawił tak, by pokazywały tę samą godzinę. Jeden z nich spóźnia się o jedną minutę na godzinę, a drugi – spieszy o jedną minutę na godzinę. Aktualnie jeden z nich pokazuje godzinę 11:00, a drugi – 12:00. O jakiej porze wczoraj zostały ustawione?

3. Półtorej kury znosi półtora jajka w półtora dnia. Ile jaj zniesie 6 kur w 6 dni, jeśli będą znosić jaja w tym samym tempie?

4. Asia ma pudełko prostopadłościennych klocków o wymiarach $1 \times 3 \times 9$. Chce z nich ułożyć sześcian. Jaki najmniejszy sześcian jest w stanie ułożyć?

5. Czy liczba 11111103^{42} jest podzielna przez 27^{29}?

6. Na pręcie długości 100 cm znajduje się pewna liczba mrówek. Każda mrówka porusza się z prędkością 1cm/s. Gdy dwie mrówki się zderzają, obie zawracają, po czym kontynuują poruszanie się w takim samym tempie. Wiadomo, że na prawym końcu pręta jest na początku mrówka zwrócona w lewo. Ile czasu zajmie, aż wszystkie mrówki spadną z pręta?

7. W trójkącie ABC bok AB ma długość 7,23m, a bok BC – 1,11m. Jaką długość może mieć bok AC jeśli wiadomo, że jest to naturalna liczba metrów?

8. Ile wynosi suma cyfr liczby
$$10^{2024} - 2024?$$

9. Maks i Adam ścigają się na 1000m. Za pierwszym razem Maks dobiega pierwszy, a Adam jest 100m za nim. W drugim biegu, żeby wyrównać szanse, Adam startuje z tego samego miejsca, a Maks 100m przed linią startu (w taki sposób, że ma dłuższy dystans do przebiegnięcia niż Adam). Który z nich wygra drugi wyścig, jeśli obaj biegną z taką samą prędkością jak w pierwszym biegu?

10. Ela napisała na kartce ułamek. Hela zamieniła jego licznik z mianownikiem, dodała 1/5, po czym uzyskany ułamek odjęła od 2. Otrzymała na koniec 3/4. Jaki ułamek napisała na początku Ela?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2023/24

Rozwiązania zadań (klasy 4-6 SP)

1. Trójkąty ADE oraz BCE są równoramienne. Niech α, β oznaczają miary kątów $\sphericalangle ADE$ oraz $\sphericalangle BCE$. Z własności równoległoboku

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Ponadto z własności trójkątów równoramiennych

$$\sphericalangle DEA = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

oraz

$$\sphericalangle CEB = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta.$$

Zatem

$$\sphericalangle AEB = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + 90^\circ - \frac{1}{2}\beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ.$$

2. Różnica czasu między zegarami rośnie o 2 minuty na godzinę. Zatem od ustawienia zegarów mineło 30 godzin. Ponadto, aktualny prawdziwy czas jest w połowie między czasami pokazywanymi przez oba zegary. Zatem aktualnie jest $11:30$, a zegary zostały ustawione $5:30$ wczoraj.

3. Półtorej kury zniesie 6 jaj w ciągu 6 dni, więc 6 kur zniesie w tym czasie

$$\frac{6}{1{,}5} \cdot 6 = 24$$

jaja.

4. Objętość jednego klocka wynosi 27. Zatem objętość sześcianu jest podzielna przez 3, więc krawędź sześcianu też. Sześcian musi mieć krawędź przynajmniej 9, a taki sześcian faktycznie da się złożyć. Zostanie użyte

$$9^3 : 27 = 27$$

klocków.

5. Sprawdzamy, że podstawa dzielnej jest podzielna przez 9(z cechy podzielności), ale nie przez 27 (np. przez dzielenie pisemne z resztą). To oznacza, że dzielna jest podzielna przez

$$3^{84},$$

ale nie przez żadną większą potęgę 3. Podzielność zatem nie zachodzi, bo

$$27^{29} = 3^{87}.$$

6. Ponieważ znaczenie ma tylko to, ile mrówek jest w jakim miejscu na pręcie (i w którym kierunku się porusza), opisany scenariusz nie różni się niczym od takiego, gdzie mrówki zamiast odwracać się przy zderzeniu mijają się bez zmiany kierunku ruchu. W takim scenariuszu potrzeba dokładnie 100 sekund (bo jest jedna mrówka zwrócona w lewo na prawym końcu pręta).

7. Trzeci bok trójkąta ma długość między $7{,}23 - 1{,}11 = 6{,}12$ a $7{,}23 + 1{,}11 = 8{,}34$ metrów. Jedyne naturalne wartości to 7 i 8. Dla obu tych przypadków, otrzymane zestawy boków spełniają nierówność trójkąta, więc takie trójkąty istnieją.

8. Jeśli wykonamy odejmowanie pisemne, będziemy musieli *pożyczyć* jedynkę bardzo wiele razy – tak długo, aż będziemy mogli odjąć końcówkę. Wynikiem będzie zatem liczba składająca się z $2024-4=2020$ cyfr 9, a na końcu będzie miała

$$10000-2024=7976.$$

Zatem suma cyfr to

$$2020\cdot 9+7+9+7+6=18209.$$

9. Podczas drugiego wyścigu w czasie, gdy Maks przebiega kilometr, Adam przebiega 900 metrów. W takim razie obu zostaje do mety 100 metrów. Ponieważ Maks jest szybszy (wnioskujemy to z tego, że wybrał pierwszy wyścig), to on przybiegnie wcześniej.

10. Należy zastosować operacje odwrotne do podanych w odwrotnej kolejności. Wynik to

$$x=\frac{20}{21},$$

co można potwierdzić równaniem

$$\frac{3}{4}=2-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{x}\right).$$