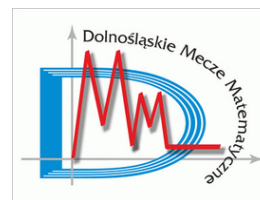


1. Grupa kosiarzy miała skosić dwie łąki, z których jedna jest dwukrotnie większa od drugiej. Przez pół dnia wszyscy kosili jedną łąkę, a następnie kosiarze podzielili się na dwie równe grupy. Jedna grupa do końca dnia skończyła skosić większą łąkę. Druga grupa nie zdążyła skosić swojej łąki. Następnego dnia jeden kosiarz w cały dzień skosił pozostałość. Ilu było kosiarzy?
2. Co jest większe: suma cyfr wszystkich liczb czterocyfrowych, czy suma cyfr wszystkich liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 9?
3. W trójkącie ostrokątnym ABC na wysokości CD zaznaczono taki punkt H , że $\sphericalangle AHD = \sphericalangle ABC$. Udowodnij, że prosta przechodząca przez punkty AH jest prostopadła do BC .
4. Babcia Bronia ma z pewnością więcej niż 70 lat, lecz mniej niż 90. Każda z jej córek, a ma babcia wyłącznie córki, ma tyle samo siostr co dzieci. Suma liczb córek i wnucząt jest równa wiekowi babci. Ile lat ma babcia Bronia i ile ma wnucząt?
5. Wewnątrz trójkąta równobocznego wybrano pewien punkt, który połączono odcinkami z wierzchołkami trójkąta oraz z jego rzutami na boki. Podzielono w ten sposób wyjściowy trójkąt na sześć trójkątów, z czego trzy z nich pokolorowano na biało, a trzy na czerwono w ten sposób, by żadne dwa tego samego koloru nie dotykały się bokiem. Wykaż, że łączne pole białych trójkątów jest równe łącznemu polu czerwonych.
6. Basen napełniany jest przez 3 krany. Gdy otwarte są pierwszy i drugi, napełnienie całego basenu trwa 20 godzin, gdy pierwszy i trzeci – 15 godzin, zaś gdy drugi i trzeci zaledwie 12 godzin. W jakim czasie napełnimy basen przy wszystkich kranach otwartych?
7. Franek miał w portmonetce pewną ilość złotych i pewną pięciozłotówkę, łącznie więcej jak 140 zł, lecz mniej jak 150 zł. Za trzecią część swojej gotówki kupił kefir. Po powrocie z zakupów zauważył, że posiada teraz tyle złotych, co wcześniej pięciozłotówkę, a tyle pięciozłotówkę, co wcześniej jednozłotówkę. Jaką kwotę dysponował wychodząc na zakupy?
8. Na mapie o skali 1 : 25000 działka Bernarda jest prostokątem o wymiarach 3 cm na 200 mm. Jakie jest pole działki w hektarach?
9. Ile jest liczb mniejszych od 1000000 o sumie cyfr nie mniejszej niż 53?
10. Rok 2025 kończy się środą. Kiedy powtórzy się taka sytuacja?



1. Niech x będzie liczbą kosiarzy. Skoszenie obu łąk zajęłoby samotnemu kosiarzowi $x + 1$ dni. Wykonanie $\frac{2}{3}$ pracy (skoszenie dużej łąki) zajęłoby $x \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Rozwiązując równanie $\frac{2}{3}(x + 1) = \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$ otrzymujemy $x = 8$, zatem było ośmiu kosiarzy.
2. Większa jest suma cyfr liczb pięciocyfrowych podzielnych przez 9. Do każdej liczby czterocyfrowej możemy dopisać po prawej cyfrę w ten sposób aby otrzymać liczbę pięciocyfrową podzielną przez 9. Zatem suma cyfr liczb pięciocyfrowych musi być większa.
3. Niech $\alpha = \sphericalangle AHD$. Odcinek CD jest wysokością, więc trójkąt ADH jest prostokątny. Zatem $\beta = \sphericalangle DAH = 90^\circ - \alpha$. Niech E będzie punktem przecięcia przedłużenia odcinka AH z odcinkiem BC . Kąty $\sphericalangle EBA$ i $\sphericalangle BAE$ są równe α i β odpowiednio. Zatem $\sphericalangle AEB = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$.
4. Jeżeli przez c oznaczymy liczbę córek babci Broni, to każda z nich ma $c - 1$ siostr i $c - 1$ dzieci. Suma liczb córek i wnucząt wynosi zatem $c + c(c - 1) = c^2$. Jedyny kwadrat liczby naturalnej leżącej między 70, a 90 to 81, czyli babcia ma 81 lat, 9 córek i 72 wnucząt.
5. Rozważany wyjściowy trójkąt przecinamy trzema prostymi równoległymi do boków trójkąta, przechodzącymi przez ten ustalony punkt. Otrzymamy z tego podziału trzy trójkąty równoboczne i trzy równoległoboki. Odcinki łączące wybrany punkt z wierzchołkami są przekątnymi równoległoboków, a odcinki łączące z rzutami na boki są wysokościami tych trójkątów równobocznych. Łatwo widać, że każdy z wyżej wymienionych obszarów zawiera dokładnie połowę czerwoną i dokładnie połowę białą.
6. Przez 60 godzin, z kranów liczonych „podwójnie” wypłynie woda o objętości: trzech basenów (kran 1, 2), czterech basenów (1, 3), pięciu basenów (2, 3). Przy otwarciu wszystkich kranów równocześnie, w ciągu 120 godzin napełnilibyśmy więc 12 basenów. Jeden basen napełniony zostanie w ciągu 10 godzin.
7. Oznaczmy przez x, y odpowiednio liczbę złotych i pięciozłotówek w portmonetce Franka. Wiemy, że $140 < x + 5y < 150$. Po zakupach sytuacja może być opisana przez $5x + y = \frac{2}{3}(x + 5y)$. Stąd obliczamy $y = \frac{13}{7}x$. Po podstawieniu otrzymujemy nierówność $140 < x + 5 \cdot \frac{13}{7}x < 150$, czyli $13\frac{11}{18} < x < 14\frac{7}{12}$. Ponieważ liczba monet jest całkowita, to $x = 14$, skąd wynika równość $y = 26$. Franek miał zatem w portmonetce 144 zł przed wyjściem na zakupy.
8. Pole obrazu działki na mapie to $3 \cdot 20 = 60 \text{ cm}^2$. Musimy to pomnożyć przez skalę do kwadratu, czyli otrzymujemy
$$60 \cdot 25^2 \cdot 1000^2 = 37500000000 \text{ cm}^2 = 3750000 \text{ m}^2 = 375 \text{ ha}.$$
9. Maksymalna suma cyfr liczby mniejszej od 1000000 to $6 \cdot 9 = 54$. Sumę nie mniejszą niż 53 otrzymujemy albo z sześciu dziewiątek, albo z pięciu dziewiątek i jednej ósemki, zatem razem jest to 7 możliwości.
10. Ponieważ $365 = 52 \cdot 7 + 1$, dzień tygodnia na końcu roku przesuwają się o 1 w rok zwykły i o 2 w rok przestępny. Zatem w najbliższych latach przesunięcia to kolejno 1, 1, 2, 1, 1, 1, czyli za 6 lat, w 2031, ostatni dzień tygodnia znowu będzie w środę.