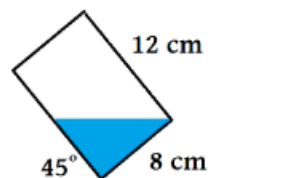
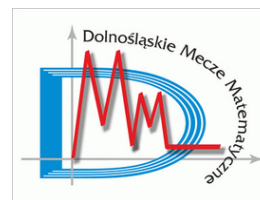


1. Spośród 100 mieszkańców pewnej miejscowości w Beskidach Wschodnich 90 mówi po huculsku, 80 po łemkowsku i 60 po bojkowsku. Ilu z nich na pewno mówi wszystkimi trzema językami?
2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkty K i L są spodkami wysokości poprowadzonych odpowiednio z punktów A i B , a punkt M jest środkiem boku AB . Wykaż, że trójkąt KLM jest równoramienny.
3. Liczby rzeczywiste a, b są różne. Jaka jest wartość ułamka $\frac{a+b}{a-b}$, jeżeli wiemy, że $2a^2 + 2b^2 = 5ab$?
4. Niech $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Oblicz:
$$f\left(\frac{1}{100}\right) + f\left(\frac{2}{100}\right) + \dots + f\left(\frac{100}{100}\right) + f\left(\frac{100}{99}\right) \dots + f\left(\frac{100}{1}\right)$$
5. Na przedłużeniu najdłuższego boku AC trójkąta ABC odłożono odcinek CD tej samej długości co odcinek BC . Udowodnij, że kąt ABD jest rozwarty.
6. Wykaż, że ułamka $\frac{5}{337}$ nie da się zapisać w postaci sumy dwóch ułamków o licznikach 1 i mianownikach naturalnych.
7. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ dane są punkty K i H w ten sposób, że $|KC| = 2|KB|$ i $|HC| = |HD|$. Udowodnij, że kąty $\angle AKB$ i $\angle AKH$ mają równe miary.
8. Czy istnieje liczba naturalna, którą da się przedstawić w postaci $n = m! + d!$ na więcej niż jeden sposób przy zachowaniu warunku $d \geq m \geq 1$? Napis $n!$ oznacza iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n .
9. Prostopadłościenną szklankę o podstawie będącej kwadratem o boku długości 8 cm oraz wysokości 12 cm ustawiono na krawędzi w sposób pokazany na rysunku na dole strony. Szklanka jest nachylona pod kątem 45° do poziomu. Następnie szklanka została wypełniona wodą aż do poziomu najniższego wierzchołka. Jaką objętość wody wiano do szklanki?
10. Czy da się dojść skoczkiem z lewego dolnego do prawego górnego rogu szachownicy 2018×2018 , wykonując tylko takie ruchy, które prowadzą w prawo i w górę?





1. W tej wiosce 10 mieszkańców nie mówi po huculsku, 20 nie mówi po łemkowsku, a 40 nie mówi po bojkowsku. Najwięcej mieszkańców niemówiących we wszystkich trzech językach mamy kiedy te 3 grupy są rozłączne, co daje $10 + 20 + 40 = 70$ osób. Zatem co najmniej $100 - 70 = 30$ osób musi znać wszystkie 3 języki. Taka sytuacja jest możliwa, jeżeli dokładnie 30 zna wszystkie języki, dokładnie 10 nie zna huculskiego, 20 nie zna łemkowskiego, a 40 bojkowskiego.

Uwaga. W przypadku braku podania przykładu dla 30 osób znających wszystkie języki zadanie należy uznać za nierozwiązane oraz przyznać maksymalnie 5 punktów.

2. Ponieważ trójkąt ten jest ostrokątny, punkty L i K leżą na bokach AC oraz BC odpowiednio. Trójkąty ABL oraz ABK są prostokątne o przeciwprostokątnej AB . Ponieważ punkt M leży na środku przeciwprostokątnej jest środkiem okręgów opisanych na nich. Zatem mamy $|LM| = \frac{1}{2}|AB|$ oraz $|KM| = \frac{1}{2}|AB|$, więc LM i KM są ramionami trójkąta równoramiennego.
3. Z założenia wynika, że $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}ab$. Zatem $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \frac{9}{2}ab$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = \frac{1}{2}ab$. Więc $(\frac{a+b}{a-b})^2 = \frac{\frac{9}{2}ab}{\frac{1}{2}ab} = 9$. Dlatego $\frac{a+b}{a-b} = 3$ lub $\frac{a+b}{a-b} = -3$. Obie odpowiedzi są możliwe np. przy $(a, b) = (1, 2)$ i $(a, b) = (2, 1)$.
4. Zauważmy, że $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 1$. Możemy zatem pogrupować w pary wyrazy postaci $f(\frac{k}{100})$ i $f(\frac{100}{k})$. Da nam to 99 par sumujących się do 1. Pozostanie jeszcze wyraz $f(\frac{100}{100}) = \frac{1}{2}$. Zatem cała suma jest równa 99,5.
5. AC to najdłuższy bok, zatem $|\angle CBA| > |\angle CAB|$. Ponadto skoro $|\angle CBD| = \frac{|\angle ACB|}{2}$, to mamy

$$|\angle ABD| = |\angle CBA| + \frac{|\angle ACB|}{2} > |\angle CAB| + \frac{|\angle ACB|}{2} = 180^\circ - (|\angle CBA| + \frac{|\angle ACB|}{2}) = 180^\circ - |\angle ABD|$$

Wobec tego $2|\angle ABD| > 180^\circ$, z czego wynika teza.

6. Gdyby miało tak być, to dla pewnych liczb a, b zachodziłaby równość $\frac{5}{337} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Czyli $5ab = 337(a+b)$, co po pomnożeniu obustronnie przez 5 i dodaniu obustronnie 337^2 , daje równość $25ab - 5 \cdot 337a - 5 \cdot 337b + 337^2 = 337^2$. A zatem $(5a - 337)(5b - 337) = 337^2$. Oba czynniki po lewej stronie równania muszą być dodatnie, bo inaczej $5a < 337$, czyli $\frac{5}{337} < \frac{1}{a}$. Załóżmy bez straty ogólności, że $a \leq b$. Wtedy albo $5a - 337 = 1$, $5b - 337 = 337^2$ albo $5a - 337 = 337$, $5b - 337 = 337$. W obu przypadkach dochodzimy do sprzeczności, ponieważ jedna strona równości jest ewidentnie podzielna przez 5, podczas gdy druga nie jest.

Uwaga. Jeżeli rozwiązanie korzysta z tego, że liczba 337 jest pierwsza, jest konieczne pokazanie tego albo przynajmniej skrótowe opisanie, jak sprawdzić ten fakt. Jeśli sprawdzenie polega na rozważeniu możliwych dzielników od 2 do 336 lub podobnie wielu, stanowi to podstawę do odjęcia 2 pktów (nie odejmujemy tylko w przypadku sposobu istotnie lepszego, np. sprawdzanie dzielników do pierwiastka).

7. Przyjmijmy bez straty ogólności, że bok kwadratu ma długość jeden. Na przedłużeniu boku CB za punktem B odłóżmy odcinek $|BM| = \frac{1}{2}$. W takim wypadku $|KH| = \frac{5}{6}$, $|MK| = \frac{5}{6}$, $|AM| = |AH|$, tak więc w czworokącie $MKHA$ boki MK i KH oraz boki MA i AH są sobie równe. Wobec tego trójkąty AKH i AKM są przystające. Stąd wynika równość kątów z zadania.

8. Załóżmy, że mamy $n = m! + d! = s! + w!$, gdzie $m \leq d, s \leq w, m < s$. Gdyby zachodziło $d \leq s$, to mielibyśmy $m! + d! < s! + s! \leq s! + w!$, zatem $s < d$. Z tej nierówności oraz $s \leq w$ wynika, że $m! = s! + w! - d!$ jest podzielna przez $s!$, co jest niemożliwe, gdyż $m < s$. Wykazaliśmy, że o ile to przedstawienie jest możliwe, to jest jedyne.
9. Zauważmy, że gdyby przyciąć szklankę do wysokości 8 cm, otrzymalibyśmy sześcian wypełniony wodą do połowy. Zatem objętość wody to

$$\frac{1}{2}8^3 = 32 \text{ cm}^3.$$

10. Nie jest to możliwe. Oznaczmy przez k liczbę ruchów "dwa w prawo, jeden w górę", a przez l liczbę ruchów "jeden w prawo, dwa w górę". Wtedy łącznie przejdziemy $2k + l$ pól w prawo oraz $2l + k$ pól w górę. Żeby trafić do prawego górnego rogu musimy mieć:

$$2k + l = 2017$$

$$k + 2l = 2017.$$

Ten układ równań ma jedyne rozwiązanie $k = l = \frac{2017}{3}$, co jest niemożliwe (nie da się wykonać ułamkowej części ruchu).