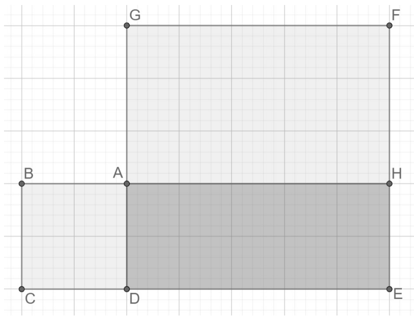
Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 1 (licea, runda eliminacyjna)



1. Suma pól mniejszego kwadratu $ABCD$ i ciemnego prostokąta $ADEH$ wynosi 210. Suma pól większego kwadratu $DEFG$ i ciemniejszego prostokąta $ADEH$ wynosi 231. Ile wynoszą długości boków kwadratów?

2. Ile jest liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 100 podzielnych przez 2, 3 lub 5?

3. Jeszcze przed otwarciem urzędu przed drzwiami ustawia się kolejka. Automat do wydawania biletów popsuł się: pierwszy bilet ma całkowity, dodatni numer, natomiast każdy kolejny bilet ma numer będący sumą numerów znajdujących się na biletach dotychczas wydrukowanych. Petent Franciszek chce dołączyć do kolejki, ale postanowił, że dołączy tylko wtedy, kiedy numer na jego bilecie będzie mniejszy od 2019-krotności numeru pierwszego biletu. Ile osób może maksymalnie liczyć kolejka, żeby Franciszek do niej dołączył?

4. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych (n, m) takich, że $n < m$ i suma wszystkich liczb naturalnych większych niż n i mniejszych niż m wynosi 271.

5. Szop Jacek dowiedział się, że zarząd jego lasu ogłosił dofinansowania na panele słoneczne (teraz kosztują 9000 denarów za sztukę). Szop wie, że jego nora wykorzystuje 150 W prądu kupowanego za cenę $1\frac{\text{denar}}{\text{W}\cdot\text{doba}}$. Panele po czasie t wyrażonym w dobach od zamontowania dostarczają $20\ \text{W} - t \cdot 0{,}02\frac{\text{W}}{\text{doba}}$ energii. Szop może odprowadzić (ale nie dostaje zwrotu kosztów) nadmiarowy prąd do sieci. Jacek zauważył, że większość mieszkańców lasu zdecydowała się na zakup 8 paneli, co go wielce zaciekawiło. Czy 8 paneli byłoby dla Jacka najbardziej opłacalnym wyborem?

6. Niech $ABCD$ będzie czworościanem. Niech X oraz Y oznaczają odpowiednio środki boków AB i CD. Pokaż, że płaszczyzny CDX oraz ABY dzielą czworościan $ABCD$ na cztery czworościany o równych objętościach.

7. Czy istnieją takie dwie liczby naturalne m, n większe od 1, że $\log_m n = \frac{14}{3}$?

8. Jaś przygotowuje się do szkolnych zawodów w biegach przełajowych. Podczas swojego półgodzinnego treningu biegał ze stałą prędkością $7\frac{\text{km}}{\text{h}}$ pomiędzy drzewem a kamieniem w odległości 500 m od drzewa. Jego złośliwa znajoma postanowiła jednak przeszkodzić mu w treningu i w trakcie, gdy biegł w drugą stronę przestawiła kamień tak, że znajduje się o 20 m dalej od drzewa. Jak wpłynęło to na całkowitą drogę przebytą przez Jasia w trakcie treningu?

9. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x \geqslant 0$.

10. Jaka jest cyfra dziesiątek w liczbie 6^{2022}?

Prosimy nie udostępniać nikomu zadań przed oficjalną ich publikacją na stronie konkursu.

1. Układ równań: oznaczmy boki kwadratów przez x, y, gdzie $x < y$. Z treści zadania otrzymujemy:

$$\begin{cases} x^2 + xy = 210 \\ y^2 + xy = 231 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami i ze wzoru skróconego mnożenia mamy $(x + y)^2 = 441$, czyli $x + y = 21$ (przypadek -21 odrzucamy, gdyż x, y to długości boków). Z pierwszej równości $x(x + y) = 210$, więc $x = 10$. Wtedy z jednej z równości wyliczamy, że $y = 11$.

Uwaga: Za drobne błędy obliczeniowe, przy poprawnej metodzie, odejmujemy do 2 punktów.

2. Niech P_n oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 100 podzielnych przez n. Szukamy liczby $|P_2 \cup P_3 \cup P_5|$. Zauważmy, że licząc $|P_2| + |P_3| + |P_5|$ policzymy każdy element zbiorów P_6, P_{10} i P_{15} przynajmniej dwa razy, a elementy zbioru P_{30} nawet 3 razy. W wyrażeniu $|P_2|+|P_3|+|P_5|-|P_6|-|P_{10}|-|P_{15}|$ odjęliśmy elementy policzone dwukrotnie, ale każdą liczbę podzielną przez 30 najpierw trzy razy dodaliśmy, a potem 3 razy odjęliśmy. W związku z tym

$$|P_2 \cup P_3 \cup P_5| = |P_2| + |P_3| + |P_5| - |P_6| - |P_{10}| - |P_{15}| + |P_{30}|.$$

Zachodzi zależność $|P_n| = \lfloor 99/n \rfloor$, zatem $|P_2 \cup P_3 \cup P_5| = 49 + 33 + 19 - 16 - 9 - 6 + 3 = 73$.

Uwaga: Za nieodjęcie elementów liczonych kilkukrotnie odejmujemy 9 punktów. Za nieuwzględnienie liczenia elementów trzykrotnie, przy uwzględnieniu elementów liczonych dwa razy – odejmujemy 5 punktów. Za liczenie liczb „na palcach” przyznajemy maksymalnie 6 punktów.

3. Oznaczmy numer na pierwszym bilecie przez a. Zauważmy, że numer na n-tym bilecie to $2^{n-2} \cdot a$ (za wyjątkiem $n = 1$ – za pominięcie tego warunku odejmujemy 1 punkt). Rozwiązujemy nierówność

$$2^{n-2}a < 2019a.$$

Skoro $2^{10} = 1024$, a $2^{11} = 2048$, to mamy $n - 2 \leqslant 10$. Stąd wynika, że petent może być co najwyżej dwunastą osobą w kolejce, więc uzyskujemy

Wynik: Kolejka może liczyć co najwyżej 11 osób (za odpowiedź: 12 osób odejmujemy 3 punkty).

4. Liczby $n + 1, n + 2, ..., m - 1$ tworzą ciąg arytmetyczny, więc ich suma wynosi $\left(\frac{(n+1)+(m-1)}{2}\right)(m - n - 1)$. Stąd $(n + m)(m - n - 1) = 2 \cdot 271$. Liczba 271 jest pierwsza[1], a ponadto $n + m > m - n - 1$.

Wobec tego mamy dwa przypadki:

$$\begin{cases} n + m = 271 \\ m - n - 1 = 2 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} n + m = 2 \cdot 271 \\ m - n - 1 = 1 \end{cases}.$$

[1]Sprawdzamy podzielność przez wszystkie liczby pierwsze mniejsze niż 17, bo $17^2 > 271$, a liczba złożona ma dzielnik właściwy mniejszy lub równy pierwiastkowi tej liczby.

Po rozwiązaniu powyższych układów równań uzyskujemy dwie możliwe odpowiedzi:
Wynik: $(n, m) = (134, 137)$ lub $(n, m) = (270, 272)$.

Uwaga: Za drobne błędy obliczeniowe odejmujemy do 2 punktów. Za poprawne rozpatrzenie tylko jednego z dwóch przypadków za zadanie przyznajemy 4 punkty.

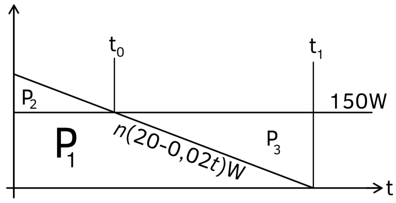
5. Policzymy czas t_1, po którym panele przestaną produkować jakąkolwiek energię:

$$0 = 20 - 0{,}02 \cdot t_1 \implies t_1 = 1000 \text{ dni.}$$

Będziemy rozważać opłacalność zakupu do czasu t_1. Łączną ilość prądu wyprodukowanego/zużytego będziemy liczyć jako pole pod wykresem produkcji/zużycia prądu w zależności od czasu.

Jeśli Jacek nie kupi żadnych paneli, zapłaci za czas t_1 łącznie $150 \cdot 1000 \cdot 1 = 150\,000$ denarów. Dopóki produkcja prądu z paneli Jacka nie przekracza 150 W, to każdy kupiony panel przynosi mu $\frac{20\cdot 1000}{2}\cdot 1 - 9000 = 1000$ denarów oszczędności, zatem opłaca mu się kupić przynajmniej 7 paneli (wówczas zapłaci łącznie 143 000 denarów w ciągu 1000 dni).

Policzymy wzór na koszt przy zakupie $n \geqslant 8$ paneli na podstawie wykresu:



$\text{Koszt}(n) = n \cdot 9000 + P_3 = 9000n + (150 \cdot 1000 - (P_1 - P_2))$

$P_1 = \frac{20n\cdot 1000}{2} = 10000n$

$P_2 = \frac{(20n-150)t_0}{2}$

$n(20 - 0{,}02t_0) = 150 \implies t_0 = \frac{20n-150}{0{,}02n}$

$P_1 - P_2 = 10000n - \frac{(20n-150)^2}{0{,}04n} = 10000n - \frac{10000n^2 - 150\,000n + 562500}{n} = -\frac{1}{n} \cdot 562500 + 150000$

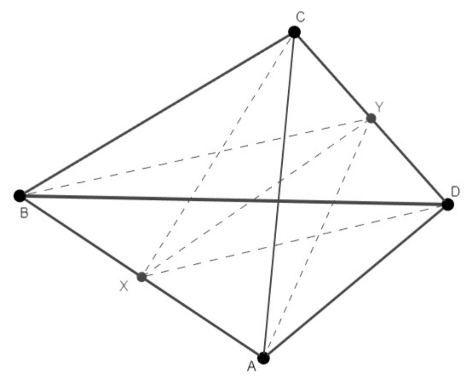
$\text{Koszt}(n) = 9000n + 150000 - 150000 + \frac{1}{n} \cdot 562500 = 9000n + \frac{1}{n} \cdot 562500.$

Ta funkcja na przedziałach $(0, 7]$ i $[8, +\infty)$ jest odpowiednio malejąca i rosnąca[2], zatem by uzyskać minimum tej funkcji dla n naturalnego wystarczy sprawdzić Koszt(7) i Koszt(8).

Uzyskujemy Koszt(7) = 143357,14... oraz Koszt(8) = 142312,5, zatem minimum jest przyjęte dla $n = 8$ i liczba ta stanowi optymalną odpowiedź.

Uwaga: Za drobne błędy rachunkowe odejmujemy do 2 punktów. Za podanie liczby 7 zamiast 8 w wyniku odejmujemy 2 punkty.

6. Zauważmy, że $P_{\triangle ACX} = P_{\triangle BCX}$, ponieważ te trójkąty mają wspólną wysokość poprowadzoną z punktu C, a odcinki AX i BX są z założenia równej długości. Wysokości czworościanów $ACDX$ i $BCDX$ poprowadzone z punktu D są natomiast równej długości, zatem również $V_{ACDX} = V_{BCDX}$.



Przetnijmy teraz czworościan $ACDX$ przy użyciu płaszczyzny ABY. Zauważmy, że analogicznie jak w poprzedniej części dowodu mamy równość pól $P_{\triangle CXY} = P_{\triangle DXY}$ (trójkąty te mają podstawy równej długości $|CY| = |DY|$ i posiadają wspólną wysokość poprowadzoną z punktu X), a zatem ponieważ czworościany $ACXY$ i $ADXY$ mają wspólną wysokość poprowadzoną z punktu A i podstawy o takim samym polu, to $V_{ACXY} = V_{ADXY} = V_1$. Analogicznie otrzymujemy $V_{BCXY} = V_{BDXY} = V_2$, a skoro

[2]Postulowana monotoniczność wynika z porównań wartości Koszt(n) i Koszt($n + 1$) uzyskiwanych za pomocą nierówności kwadratowych lub obliczenia pochodnej: $f'(n) = 9000 - \frac{562500}{n^2} = 4500\left(2 - \frac{125}{n^2}\right)$.

$$2V_1 = V_{ACXY} + V_{ADXY} = V_{ACDX} = V_{BCDX} = V_{BCXY} + V_{BDXY} = 2V_2,$$

to $V_1 = V_2$. Zatem te dwie płaszczyzny dzielą czworościan na cztery mniejsze czworościany o równych objętościach, czego należało dowieść.

Uwaga: Za pokazanie równości objętości czworościanów $ACDX$ i $BCDX$ przyznajemy 3 punkty. Za drobne pomyłki w indeksowaniu wierzchołków odejmujemy 1 punkt.

7. Istnieją. Niech k będzie dowolną liczbą naturalną większą od 1. Wystarczy wziąć $m = k^3$ i $n = k^{14}$. Wówczas

$$m^{14/3} = (k^3)^{14/3} = k^{14} = n,$$

a zatem $\log_m n = \frac{14}{3}$.

Uwaga: Za pominięcie w rozwiązaniu warunku $k > 1$ odejmujemy 4 punkty. Oczywiście, podanie konkretnego k lub działającej pary (m, n) jest całkowicie poprawnym rozwiązaniem.

8. Całkowita droga przebyta przez Jasia nie zmieni się. Istotnie, w ciągu całego treningu porusza się on ze stałą prędkością $7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, a skoro trening trwa 0,5 h, to całkowita droga wyniesie 3,5 km niezależnie od działań „koleżanki”.

9. **Sposób I** Zauważmy, że $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x = (x-2)^2 x(x+2)$. Każdy z trzech czynników tego iloczynu: $(x-2)^2, x, x+2$ jest nieujemny, gdy x jest liczbą dodatnią, zatem ich iloczyn także będzie nieujemny.

Sposób II Skoro x jest liczbą dodatnią, to możemy podzielić obie strony nierówności przez x i wówczas otrzymamy nierówność równoważną:

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \geqslant 0.$$

Po obustronnym dodaniu $2x^2 + 4x$ otrzymamy

$$x^3 + 8 \geqslant 2x^2 + 4x.$$

Zauważmy, że ta nierówność jest sumą dwóch innych nierówności:

$$\frac{x^3 + x^3 + 8}{3} \geqslant 2x^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{x^3 + 8 + 8}{3} \geqslant 4x.$$

Powyższe nierówności wynikają z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną odpowiednio dla zbiorów liczb $\{x^3, x^3, 8\}$ oraz $\{x^3, 8, 8\}$.

Uwaga: Za brak wyjaśnienia, dlaczego możemy podzielić obie strony nierówności przez x odejmujemy 2 punkty.

10. Zauważmy, że przy przemnożeniu dowolnej całkowitej liczby a przez 6 na cyfrę dziesiątek mają wpływ tylko cyfra dziesiątek oraz cyfra jedności liczby a. Ponadto zauważmy, że cyfra jedności dowolnej liczby postaci 6^n (dla $n > 0$) jest równa 6. Wypiszmy cyfry dziesiątek i jedności dla kilku początkowych liczb postaci 6^n:

$6^1 = 6$	$6^3 = [\ldots]16$	$6^5 = [\ldots]76$	$6^7 = [\ldots]36$
$6^2 = 36$	$6^4 = [\ldots]96$	$6^6 = [\ldots]56$	$\vdots$

Zauważmy, że w związku z tym, że na cyfrę dziesiątek w kolejnej potędze 6 mają wpływ wyłącznie cyfry dziesiątek i jedności w poprzedniej potędze 6, to jeśli dwie ostatnie cyfry są takie same w dwóch potęgach 6^k i 6^l, to będą takie same w 6^{k+1} i 6^{l+1}, 6^{k+2} i 6^{l+2} ..., czyli cyfry będą powtarzać się okresowo, w tym przypadku z okresem $7 - 2 = 5$. Zatem cyfra dziesiątek liczby 6^{2022} będzie taka sama jak cyfra dziesiątek liczby 6^2.

Wynik: 3.

Uwaga: Za zauważenie okresowości, ale błędne podanie okresu przyznajemy 4 punkty. Za poprawne wyznaczenie okresu przyznajemy 7 punktów.