Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Mecz 1 (licea, runda eliminacyjna)

1. Udowodnij, że w dowolnej grupie n osób, gdzie $n \geq 2$, są takie dwie, które znają tę samą liczbę osób. Zakładamy, że jeżeli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

2. Doświadczenie losowe polega na rzuceniu dwoma uczciwymi kostkami sześciennymi. Rozpatrzmy dwa zdarzenia losowe:

- A – na pierwszej kostce wypadła dwójka lub czwórka;
- B – suma oczek na obu kostkach jest mniejsza niż 5.

Czy zdarzenia A i B są niezależne?

3. 2 lutego 2020 był dniem, którego zapis w postaci DD-MM-RRRR zawiera tylko dwie różne cyfry. Ile takich dni istnieje pomiędzy 1.01.2000 a 31.12.2999?

4. Niech ABC będzie dowolnym trójkątem nierównoramiennym. Skonstruuj figurę, która jest zbiorem wszystkich punktów wewnątrz trójkąta leżących bliżej punktu A niż punktu B i jednocześnie bliżej punktu C niż punktu A.

5. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p i całkowite n spełniające równanie

$$8 + 2n^3 = p^3n^2 - p^2n + p.$$

6. Wyznacz wszystkie liczby całkowite n spełniające równanie

$$6n^2 = n^4 + 3.$$

7. Pokaż, że dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n zachodzi nierówność

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Wskazówka: Możesz skorzystać z nierówności $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$. *Jeśli z niej korzystasz, udowodnij ją.*

8. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę $30°$. Punkty D oraz E należące odpowiednio do boków AB oraz AC trójkąta ABC wybrano w taki sposób, że $\sphericalangle ADE = 15°$ i $AE = EC$. Wiedząc, że $|AB| = 6\sqrt{3}$ oraz $|BC| = 4$ wyznacz pole trójkąta ADE.

9. Pokaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$2x^2y^2 + 14y^2 + 5x^2 \leq \sqrt{x^4y^2 + 3x^4 + x^2y^4 + 20x^2y^2 + 51x^2 + 7y^4 + 21y^2 + 212}.$$

10. Jasio wykonuje ciąg niezależnych doświadczeń losowych: rzuca symetryczną monetą n razy. Dla jakich n szansa na to, że wypadły mu kiedyś 2 orły z rzędu, wynosi co najmniej 50%?

1. Zauważmy, że zbiór dopuszczalnych liczb osób znanych przez członków grupy to $\{0, 1, \ldots, n-2\}$ albo $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Jest tak, ponieważ fakt istnienia osoby, która nie zna nikogo jest równoważny nieistnieniu osoby znającej wszystkich.

Wtedy z zasady szufladkowej, skoro mamy n osób i co najwyżej $n-1$ dopuszczalnych liczb znajomych, przynajmniej dwie osoby będą miały tę samą liczbę znajomych.

2. Te zdarzenia są niezależne. Niech $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Wówczas możemy przedstawić zdarzenia A i B z treści zadania jako

$$A = \{(x, y) : x \in \{2, 4\}, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \text{ i } B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}.$$

Łatwo zauważyć, że $|\Omega| = 36$, $|A| = 12$, $|B| = 6$ i $|A \cap B| = 2$. Stąd

$$\mathbb{P}(A) = \frac{12}{36}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} \text{ i } \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{36},$$

a zatem zachodzi równość

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B),$$

czyli zdarzenia A i B są niezależne.

3. Zauważmy, że każda data w latach 2000 – 2999 musi zawierać cyfrę 2. Ponadto, ze względu na zapis miesiąca data musi zawierać cyfrę 0 lub cyfrę 1. Rozważmy dwa przypadki:

(a) Data jest złożona z cyfr 0 i 2. Wówczas rok możemy wybrać na 2^3 sposobów (na pierwszym miejscu musi być cyfra 2, a na każdym kolejnym 0 lub 2). Tylko jeden miesiąc – luty – w zapisie zawiera wyłącznie cyfry 0 i 2, zaś dzień możemy wybrać na 3 sposoby (02, 20 lub 22). Łącznie otrzymujemy $2^3 \cdot 3 = 24$ kombinacje.

(b) Data jest złożona z cyfr 1 i 2. Wtedy rok wybierzemy również na 2^3 sposobów. Jako miesiąc musimy wybrać listopad lub grudzień (11 lub 12), zaś dzień wybierzemy na 4 sposoby (11, 12, 21 lub 22). Łącznie jest więc $2^3 \cdot 2 \cdot 4 = 64$ kombinacji.

Łącznie jest 88 takich dni.

4. Należy poprowadzić symetralne boków AB i AC i wybrać obszar będący przekrojem wnętrza trójkąta oraz półpłaszczyzn wyznaczonych przez te symetralne zawierających odpowiednio punkty A i C. Naturalnie obszar znajdujący się po tej stronie symetralnej AB, po której znajduje się punkt A zawiera punkty bliższe do punktu A niż do punktu B (z własności symetralnej). Analogicznie dla półpłaszczyzny wyznaczonej przez symetralną boku AC.

Uwaga. Zależnie od wyboru trójkąta szukany obszar może być pusty.

5. Zauważmy, że lewa strona równania jest parzysta niezależnie od wyboru n i p, a prawa jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba p jest parzysta.

Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, zatem równanie możemy sprowadzić do prostszej postaci:

$$8 + 2n^3 = 8n^2 - 4n + 2,$$
$$2n^3 - 8n^2 + 4n + 6 = 0,$$
$$n^3 - 4n^2 + 2n + 3 = 0,$$
$$(n-3)(n^2 - n - 1) = 0.$$

Jedyną liczbą całkowitą spełniającą powyższe równanie jest $n = 3$.

Ostatecznie jedyną parą liczb spełniających równanie jest $p = 2$, $n = 3$.

6. Przekształćmy równanie w następujący sposób:

$$7n^2 = n^4 + n^2 + 3.$$

Rozważając reszty z dzielenia przez 7, możemy zauważyć, że zbiór możliwych reszt z dzielenia wyrażenia $n^4 + n^2 + 3$ przez 7 to $\{2, 3, 4, 5\}$, ale $7n^2$ daje zawsze resztę 0 przy dzieleniu przez 7, więc równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

7. Dowiedźmy najpierw wskazówki.:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq 2$$

Nierówność udowodnimy indukcyjnie.

Baza: Dla $n = 1$ teza zadania zachodzi, bo $1 \leq 1$.

Założenie indukcyjne: Załóżmy, że dla pewnego n zachodzi $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Dowód indukcyjny:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \overset{\text{ZI}}{\leq} \left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1) = \frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{n+1}}{2^n(n+2)^{n+1}} \overset{\text{Wsk.}}{\leq} \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}.$$

8. Najpierw policzmy pole trójkąta ABC:

$$P_{ABC} = \frac{|AB|\,|BC| \sin \sphericalangle ABC}{2} = 6\sqrt{3}$$

Oznaczmy przez F punkt przecięcia dwusiecznej $\sphericalangle ABC$ i odcinka AC. Z twierdzenia o dwusiecznej wiemy, że

$$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

skąd mamy również

$$\frac{|AC|}{|AF|} = 1 + \frac{|FC|}{|AF|} = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+2}{3\sqrt{3}}.$$

Niech teraz h oznacza długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z punktu B. Stąd mamy

$$P_{AFB} = \frac{|AF|\,h}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{|FC|\,h}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} P_{BCF},$$

zatem skoro $P_{AFB} + P_{BCF} = P_{ABC}$, to $P_{ABF} = \frac{6\sqrt{3}}{1+3\sqrt{3}/2}$. Zauważmy teraz, że trójkąty ADE i ABF są podobne z cechy (kk), skąd mamy

$$P_{ADE} = P_{ABF}\left(\frac{|AE|}{|AF|}\right)^2 = \frac{6\sqrt{3}}{1+3\sqrt{3}/2}\left(\frac{|AE|}{|AF|}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}\left(\frac{|AC|}{|AF|}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}\left(\frac{3\sqrt{3}+2}{3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{9+2\sqrt{3}}{9}.$$

9. Oszacowujemy lewą stronę nierówności z góry i prawą z dołu:

$$2x^2y^2 + 14y^2 + 5x^2 + 42 \leq 2x^2y^2 + 14y^2 + 6x^2 + 42$$

$$\sqrt{x^4y^2 + 3x^4 + x^2y^4 + 20x^2y^2 + 51x^2 + 7y^4 + 21y^2 + 210} \leq$$
$$\leq \sqrt{x^4y^2 + 3x^4 + x^2y^4 + 20x^2y^2 + 51x^2 + 7y^4 + 21y^2 + 212}$$

Możemy udowodnić nierówność między tak uzyskanymi szacowaniami, a więc ostrzejszą wersję nierówności z treści zadania – po uporządkowaniu wyrazów mamy

$$2(x^2+7)(y^2+3) \leq \sqrt{(x^2+7)(y^2+3)(x^2+7+y^2+3)}$$

$$\frac{2(x^2+7)(y^2+3)}{(x^2+7+y^2+3)} \leq \sqrt{(x^2+7)(y^2+3)},$$

co jest prawdziwe z nierówności między średnią harmoniczną i arytmetyczną.

10. Każdy ciąg $\{O,R\}^n$ możemy sparować z jego negacją, czyli ciągiem powstałym przez zamianę R w O i O w R. Jeżeli w jakimś ciągu istnieje podsłowo RR albo OO, to w jego parze co najmniej jeden ciąg (a więc połowa) spełnia warunek Jasia o posiadaniu podsłowa OO.

Są tylko dwa ciągi, w których nie ma podsłów OO ani RR i w dodatku są sparowane (są to ciągi $RORO\ldots$ i $OROR\ldots$).

Skoro w każdej z $2^{n-1}-1$ par ciągów co najmniej połowa ciągów (czyli co najmniej jeden) zawiera podsłowo OO, to mamy już $2^{n-1}-1$ ciągów z podsłowem OO, a więc do globalnej połowy brakuje nam znalezienia takiej pary, w której oba ciągi zawierają podsłowo OO. Istnienie takiej pary jest więc równoważne warunkowi z treści zadania, ponieważ wówczas na pewno mamy co najmniej $(2^{n-1}-1)+1 = 2^n \cdot 50\%$ ciągów z podsłowem OO.

Dla $n \geq 4$ taką parą jest $(OORR\ldots, RROO\ldots)$, a dla $n < 4$ łatwo sprawdzić, że taka para nie istnieje. W konsekwencji odpowiedzią jest $n \geq 4$.