Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2023/24

**Eliminacje** (klasy 4-6 SP)

**1.** Jacek chce odwiedzić Kacpra. Po drodze od domu Jacka do domu Kacpra znajduje się las. Przez las prowadzi 5 ścieżek, a od lasu do domu Kacpra 4 ścieżki. Na ile sposobów Jacek może zaplanować trasę do domu Kacpra i z powrotem, jeśli nie chce iść dwa razy tą samą ścieżką? Idąc w obie strony Jacek musi przejść przez las.

**2.** W rzędzie ustawiono sto odważników o masach $1, 2, \ldots, 100$ gramów. Czy da się tak ułożyć te odważniki na dwóch szalkach wagi, by ta była w równowadze?

**3.** Oblicz sprytnie

$$4 - 8 + 12 - 16 + \ldots + 396 - 400.$$

**4.** Jaki kąt tworzy wskazówka godzinowa zegara ze wskazówką minutową o godzinie 3:44?

**5.** Jak co wakacje Krzysiek pomagał na rodzinnej farmie. Pewnego dnia dostał za zadanie spakować arbuzy do skrzynek. Okazało się, że zarówno, gdy pakował je po 11, jak i po 13, zostawały mu dwa arbuzy. Krzyśka ciekawi ile jest arbuzów, ale nie potrafi do tylu doliczyć, wie natomiast że jest to więcej niż 100, a mniej niż 200. Ile arbuzów dostał do zapakowania?

**6.** Na prostej $l$ zaznaczono cztery punkty $A, B, C, D$ w tej kolejności. Punkt $E$ znajduje się poza prostą $l$, przy czym

$$AB = BE, \ CD = CE, \ \sphericalangle AEB = 30^\circ, \ \sphericalangle CED = 20^\circ.$$

Oblicz kąt $\sphericalangle BEC$.

**7.** Basia musi zapłacić w sklepie 41 zł. Ma 37 monet jednozłotowych i 13 monet dwuzłotowych. Na ile sposobów może zapłacić? Dwa sposoby uważamy za takie same, jeśli Basia użyje tylu samych monet o nominale 1 zł oraz tyle samo monet o nominale 2 zł.

**8.** Ile zer na końcu ma liczba

$$2000 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot \ldots \cdot 2023?$$

**9.** Czy istnieje liczba naturalna taka, że do napisania obok siebie tej liczby jak i jej kwadratu użyjemy łącznie wszystkich cyfr od 0 do 9, i każdej cyfry dokładnie raz?

**10.** Znudzony Adam zaczął wypisywać kolejne liczby naturalne, których zapis dziesiętny nie zawiera cyfry 3, zaczynając od 0. Pierwsze kilka liczb, które wypisał to

$$0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, \ldots, 29, 40, \ldots$$

Ponieważ miał bardzo dużo wolnego czasu, zdążył ich wypisać aż dwieście dwie. Jaka jest ostatnia liczba, którą wypisał Adam?

**1.** Jacek musi wybrać dwie różne ścieżki przez las i dwie różne między lasem a domem Kacpra, przy czym kolejność ma tutaj znaczenie znaczenie. Zatem na drogę w jedną stronę ma wyborów

$$5 \cdot 4 = 20.$$

Na drogę powrotną pozostają mu 4 ścieżki przez las i 3 od domu Kacpra do lasu, czyli wyborów ma

$$4 \cdot 3 = 12,$$

co razem daje

$$12 \cdot 20 = 240.$$

**2.** Podzielmy nasze 100 odważników na 25 grup po cztery kolejne. Jeśli na lewej szalce położymy pierwszy i czwarty odważnik z danej grupy, a na prawej drugi i trzeci, waga będzie zrównoważona zgodnie z tożsamością

$$a + (a + 3) = (a + 1) + (a + 2).$$

Zatem, jeśli zrobimy to dla wszystkich grup, otrzymamy zrównoważoną wagę.

**3.** Możemy to wyrażenie ponawiasować

$$(4 - 8) + (12 - 16) + \cdots + (396 - 400) = 50 \cdot (-4) = -200.$$

**4.** Kąt wskazówki minutowej względem pionu w stopniach wynosi

$$360 \cdot \frac{44}{60} = 264.$$

Kąt wskazówki godzinowej

$$360 \cdot \frac{3 \cdot 60 + 44}{12 \cdot 60} = 360 \cdot \frac{224}{720} = 112.$$

Zatem kąt między nimi w stopniach wynosi

$$264 - 112 = 152.$$

**5.** Niech $n$ będzie szukaną liczbą. Wtedy $n-2$ jest między 98 a 198. Ponadto liczba $n-2$ jest podzielna zarówno przez 11, jak i 13. Ponieważ 11 i 13 pierwsze, to $n-2$ musi mieć obie je w rozkładzie na czynniki pierwsze, więc musi być podzielna przez

$$11 \cdot 13 = 143,$$

co z ograniczenia na rozmiar $n$ daje

$$n - 2 = 143,$$

czyli

$$n = 145.$$

**6.** Ponieważ trójkąt $ABE$ jest równoramienny, mamy

$$\sphericalangle EAB = 30^\circ$$

i z sumy kątów w tym trójkącie

$$\sphericalangle EBA = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.$$

Ponieważ kąt $\sphericalangle EBC$ jest uzupełniający do $\sphericalangle EBA$, to

$$\sphericalangle EBC = 180^\circ - \sphericalangle EBA = 60^\circ.$$

W analogiczny sposób, korzystając z trójkąta $ECD$ możemy obliczyć

$$\sphericalangle ECB = 40^\circ.$$

Zatem z sumy kątów w trójkącie $BEC$

$$\sphericalangle BEC = 180^\circ - \sphericalangle ECB - \sphericalangle EBC = 80^\circ.$$

**7.** Basia może użyć od 2 do 13 monet dwuzłotowych, zatem możliwości jest

$$13 - 2 + 1 = 12.$$

**8.** Rozważmy najpierw iloczyn bez 2000. Są w nim dokładnie cztery liczby podzielne przez 5, a żadna nie jest podzielna przez 25. Zatem, ponieważ ten iloczyn jest podzielny przez 16, ma dokładnie cztery zera na końcu. Pomnożenie przez 2000 doda trzy zera – ponieważ 2000 ma dokładnie trzy piątki w rozkładzie na czynniki pierwsze, nie pojawi się żadne dodatkowe zero. Łącznie zer będzie 7.

**9.** Liczba cyfr tej liczby i jej kwadratu musiałaby łącznie wynosić 10. Liczba cyfr kwadratu liczby rośnie wraz z tą liczbą. Liczba $999^2$ ma 6 cyfr, czyli 999 oraz $999^2$ mają łącznie 9 cyfr. Szkukana liczba musi być większa niż 999. Liczba $1000^2$ ma z kolei 7 cyfr, czyli łącznie z 1000 ma ich 11. Stąd, nie istnieje liczba o własności postulowanej w treści zadania.

**10.** Adam wypisze 9 liczb jednocyfrowych oraz $8 \cdot 9 = 72$ liczb dwucyfrowych. Liczb trzycyfrowych bez cyfry 3 jest $8 \cdot 9 \cdot 9$, co jest większe niż 200, zatem ostatnia liczba wypisana przez Adama będzie trzycyfrowa. Po liczbach dwucyfrowych wypisze on $1 \cdot 9 \cdot 9 = 81$ liczb trzycyfrowych zaczynających się od 1, co razem daje 162 wypisane liczby. Liczba, której szukamy, to 40. liczba którą wypisze potem.

Ponieważ liczb bez 3 zaczynających się od 2 jest 81, to początkowa cyfra ostatniej liczby Adama to 2. Dla każdej cyfry dziesiątek poza 3, Adam wypisze 9 liczb z tą cyfrą dziesiątek. Ponieważ

$$40 = 4 \cdot 9 + 4,$$

to cyfrą dziesiątek będzie piąta *dostępna* cyfra – 5, a cyfrą jedności czwarta *dostępna* cyfra – 4. Zatem jako dwieście drugą Adam napisze liczbę 254.