Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 1 (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. Liczbę naturalną nazwiemy *różową*, gdy iloczyn jej cyfr jest równy 1200 oraz żadna z jej cyfr nie jest jedynką. Wskaż największą i najmniejszą liczbę różową.

2. Na stole leży 127 zapałek. Ewa i Darek w każdej turze zabierają ze stołu od jednej do ośmiu zapałek. Wygrywa osoba, która zabierze ostatnią zapałkę. Zaczyna Ewa. Czy Ewa może wygrać przyjmując odpowiednią strategię? Jeśli tak, to jaką strategię musi obrać?

3. Kacper, Daria, Łukasz, Gosia, Janek i Karolina stoją w szeregu. Wiemy, że:
(a) Gosia stoi między Jankiem i Karoliną,
(b) Łukasz stoi pomiędzy Gosią i Jankiem,
(c) Daria stoi pomiędzy Łukaszem i Gosią,
(d) Kacper stoi pomiędzy Darią i Łukaszem.

Czy jesteśmy w stanie stwierdzić jednoznacznie, które z poniższych zdań jest prawdziwe?
- Kacper zajmuje skrajną pozycję pozycję z lewej lub prawej strony
- Kacper stoi drugi od brzegu
- Kacper stoi na trzeciej pozycji z lewej strony
- Przedstawione rozmieszczenie jest niemożliwe
- Bezpośrednimi sąsiadami Kacpra są Janek i Karolina

4. Czy istnieje graniastosłup o 2021 krawędziach?

5. Wylosowano siedem liczb naturalnych. Wykaż, że różnica pewnych dwóch z nich jest podzielna przez 6.

6. Czy istnieje 2021 takich różnych liczb pierwszych, że ich suma jest liczbą parzystą?

7. Klasa złożona z 31 uczniów rozwiązała łącznie 255 zadań. Okazało się, że niektórzy uczniowie rozwiązali tylko po 7 zadań, a wszyscy pozostali po 9. Ilu uczniom udało się rozwiązać 9 zadań?

8. Szalony matematyk w ramach zajęć ze swoimi uczniami poddał ich pewnej próbie. Mają do wyboru trzy kartki: niebieską, czerwoną i białą. W zależności od ich wyboru spotka ich jedna z trzech rzeczy:
- dostaną rozwiązania zadań do najbliższego sprawdzianu,
- nic się nie stanie,
- zadania na sprawdzianie zostaną zamienione na dużo trudniejsze.

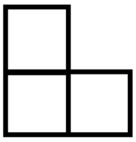
Dał im trzy wskazówki:
- Jeśli na białej kartce są rozwiązania, to niebieska kartka oznacza trudniejsze pytania.
- Czerwona kartka jest najgorsza lub rozwiązania są na białej kartce.
- Rozwiązania są na czerwonej kartce wtedy (i tylko wtedy), gdy trudniejsze rozwiązania są na niebieskiej kartce.

Wybrali niebieską kartkę. Co to oznacza?

9. Dwie mędrczynie, przemierzając świat, natrafiły na potężnego starożytnego kolosa, który wyzwał je na pojedynek. Zadał im zagadkę, od której miało zależeć ich życie. Rzucił im worek pełen monet. Rzekł: „Monet fałszywych jest 11. Każda z nich jest o 1 gram lżejsza od monet prawdziwych, wszystkich monet będzie 21". Nakazał wyjąć im jedną losową monetę i powiedzieć, czy jest prawdziwa. Dał im do dyspozycji ludzką wagę uchylną, która wskazuje dokładną wagę w gramach i dał możliwość jednokrotnego skorzystania. Jeśli odpowiedzą poprawnie, kolos je oszczędzi. Czy mędrczynie ujdą z życiem? Jeśli tak, to w jaki sposób mogą to zrobić?

Waga uchylna składa się z dwóch szalek. Pokazuje różnicę mas przedmiotów znajdujących się na obu szalkach.

10. Czy kwadrat 8×8 z wyciętym narożem można pokryć płytkami z rysunku? Jeśli nie, to dlaczego? Jeśli tak, to w jaki sposób?



Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 1 - rozwiązania (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. $1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$. Aby dostać największą liczbę różową, bierzemy rozkład 1200 na możliwie najwięcej dzielników – czyli rozkład na dzielniki pierwsze – i ustawiamy je od największego do najmniejszego. Stąd największa liczba różowa to 5532222. Aby dostać najmniejszą liczbę różową, bierzemy rozkład na możliwie najmniej dzielników (ale takich, że są one liczbami jednocyfrowymi) i ustawiamy je od najmniejszego do największego. Stąd najmiejsza liczba różowa to 5568.

Za dobre rozumowanie i złe liczby albo dobre rozumowanie z niewielkimi lukami - 6-9 pkt. Za podanie jednej liczby dobrze, bez uzasadnienia - 1 pkt. Za podanie obu liczb dobrze, bez uzasadnienia - 2 pkt. Za podanie jednej liczby dobrze, z uzasadnieniem - 5 pkt.

2. Ewa może wygrać. W tym celu musi najpierw wziąć jedną zapałkę, a w kolejnych ruchach musi brać tyle, by uzupełnić ruch przeciwnika do 9, gdyż $127 = 1 + 9 \cdot 14$. Wówczas uniemożliwi przeciwnikowi pozostawienie na stole liczby zapałek podzielnej przez 9 – w tym zera.

Za dobre rozumowanie i przedstawienie dokładnej strategii, jaką powinna przyjąć Ewa - 10pkt. Za luki w rozumowaniu z poprawną odpowiedzią - 6-9 pkt. za nierozwiązane zadanie - 0-5 pkt.

3. Kacper stoi na trzeciej pozycji z lewej strony. Warunki zadania spełniają dwa układy osób:
(a) Janek, Łukasz, Kacper, Daria, Gosia, Karolina;
(b) Karolina, Gosia, Daria, Kacper, Łukasz, Janek.
Za dobrą odpowiedź z kompletnym rozumowaniem - 10 pkt. Za dobrą odpowiedź z lukami w rozumowaniu, kto gdzie stoi i dlaczego - 6-9 pkt. Za błędną odpowiedź z poprawnym rozumowaniem 0-5 pkt. Za błędną odpowiedź z błędnym rozumowaniem - 0 pkt.

4. Odpowiedź: Nie. Jeżeli n oznacza liczbę krawędzi podstawy danego graniastosłupa, to ma on $3n$ krawędzi. Dzieje się tak, ponieważ ma on dwie podstawy o n krawędziach oraz n krawędzi bocznych. (Za tę obserwację 5 pkt). Skoro $2021 = 3 \cdot 673 + 2$, czyli nie jest podzielna przez 3. A zatem nie istnieje graniastosłup o takiej liczbie krawędzi.

Za dobrą odpowiedź z dobrym rozumowaniem, ale z lukami – 6-9 pkt. Za dobrą odpowiedź, bez uzasadnienia – 1 pkt.

5. Odpowiedź: Tak. Wynika to z zasady szufladkowej: ponieważ reszt z dzielenia przez 6 jest 6, to wśród 7 liczb całkowitych istnieją dwie dające tą samą resztę. A co za tym idzie, ich różnica jest podzielna przez 6.

Za dobrą odpowiedź z dobrym rozumowaniem, ale z lukami – 6-9 pkt. Za próbę skorzystania z zasady szufladkowej, ale błędną – 3 pkt. Za dobrą odpowiedź, bez uzasadnienia - 1 pkt.

6. Tak. Istnieje dokładnie jedna parzysta liczba pierwsza, czyli 2 (za tę obserwację 2 pkt). Możemy zatem wziąć 2 i 2020 dowolnych liczb pierwszych. Ich suma będzie parzysta, ponieważ mamy parzystą (2020) liczbę liczb nieparzystych, czyli suma jest parzysta, plus liczbę parzystą, czyli 2.

7. Załóżmy, że wszyscy uczniowie są w bardziej produktywnej grupie. Wówczas liczba wykonanych zadań wyniesie $31 \cdot 9 = 279$. Potrzebujemy zmniejszyć liczbę zadań o 24, trzeba więc przenieść dwanaścioro uczniów do mniej produktywnej grupy. Liczba uczniów bardziej produktywnych wynosi więc 19. Za poprawną odpowiedź z pełnym rozumowaniem lub układem równań poprawnie rozwiązanym - 10 pkt. Za poprawną odpowiedź bez kompletnego uzasadnienia - 6-9 pkt. Za niepoprawną odpowiedź - 0-5 pkt.

8. Gdyby niebieska kartka była neutralna, to (z iii) czerwona kartka nie mogłaby mieć rozwiązań, musiałaby więc być negatywna. Ale wtedy (ii) mówi, że biała ma rozwiązania, co z (i) pociąga za sobą, że niebieska jest negatywna – sprzeczność.

Gdyby zaś niebieska kartka była negatywna, to (iii) implikowałoby, że czerwona kartka jest pozytywna, czyli biała jest neutralna. Ale wtedy (ii) nie jest spełnione.

Zatem niebieska kartka zawiera rozwiązania.

Za poprawne rozwiązanie z uzasadnieniem - 10 pkt. Za poprawne rozwiązanie bez kompletengo uzasadnienia - 6-9 pkt. Za niepoprawne rozwiązanie z częściwoo poprawnym rozumowaniem 0-5 pkt.

9. Mają szansę. Pozostałe 20 monet należy podzielić na dwa stosy po 10 monet i położyć na szalkach wagi. Jeśli różnica mas tych stosów jest liczbą parzystą, to wśród monet jest parzysta liczba monet fałszywych, czyli wylosowana moneta jest fałszywa. Analogicznie, jeśli nieparzysta jest różnica, to jest prawdziwa.

Za rozwiązanie używające więcej niż jednego ważenia (lecz nie więcej niż sześciu) można przyznać do trzech punktów.

10. Można. Punkty przyznajemy za znalezienie takiego pokrycia. Jedną z metod jest podzielenie kwadratu na cztery mniejsze kwadraty 4×4 i umieszczenie na środku (na granicy czterech kwadratów) płytki – w taki sposób, by każdy kwadrat miał 15 dostępnych pól. W razie potrzeby procedurę można powtórzyć, dzieląc każdy kwadrat 4×4 na kwadraty 2×2.

Za poprawne rozwiązanie z uzasadnieniem, że jest wiele opcji - 10 pkt. Za poprawne rozwiązanie, bez wskazania, że istnieje wiele ustawień - 9 pkt. Za niepoprawne rozwiązanie z elementami poprawnego rozumowania tj. zbudowania części takiego pokrycia 0-5 pkt.