Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Mecz 1 (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. W pewnym sklepie piłka podrożała o 20%, a skakanka o 50%. Wtedy okazało się, że oba przedmioty kosztują tyle samo. O ile procent piłka była droższa od skakanki przed podwyżką?

2. Dane są dodatnie liczby a, b, c, d, takie, że $ab = 2, bc = 3, cd = 10, de = 7$. Jaką wartość ma $\frac{e}{a}$?

3. Z wierzchołka prostokąta poprowadzono prostą, która przecięła bok tego prostokąta, dzieląc go na dwie figury o stosunku pól 1:5. Jaki jest stosunek dwóch odcinków, na które został podzielony bok tego prostokąta?

4. O której godzinie pomiędzy 12:00 a 13:00 wskazówki godzinowa i minutowa stworzą kąt 66°?

5. W 2023 roku Ania i jej starsza (urodzona w innym roku) kuzynka Ewa skończą każda tyle lat, ile wynosi suma cyfr jej roku urodzenia. W którym roku urodziła się Ania, a w którym Ewa?

6. Dane są takie liczby całkowite a, b, że liczby $a + b$ oraz $a - b$ są podzielne przez 22. Czy liczby a i b muszą być podzielne przez 11?

7. Trójkąt o bokach 5 i 11 ma pole 22. Jaką długość ma jego trzeci bok?

8. Wykaż, że liczba $6^{2022} - 6^{2021} + 8 \cdot 6^{2020}$ jest podzielna przez 19.

9. Płot ma długość 120 cm i jest złożony z trójkątów równoramiennych (niekoniecznie przystających) ułożonych koło siebie. Wysokość każdego trójkąta jest równa $\frac{2}{3}$ długości jego podstawy. Mrówka chce przejść cały płot po jego wierzchu, czyli wdrapując się na każdy trójkąt po kolei. Jaką drogę przejdzie mrówka?

10. Odległość między miastami A i B wynosi 100km. Z miasta A w stronę miasta B wyrusza pociąg o godzinie 10.00. Pociąg ten jedzie z prędkością $v_1 = 90$km/h. O godzinie 10.20 wyrusza pociąg z miasta B w stronę miasta A i jedzie z prędkością $v_2 = 120$km/h. O której godzinie pociągi się miną?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Mecz 1 - rozwiązania (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. Oznaczmy początkową cenę piłki jako p, a skakanki jako s. Po podwyżce piłka kosztuje $\frac{6}{5}p$, a skakanka $\frac{3}{2}s$. Stąd $\frac{6}{5}p = \frac{3}{2}s$. Czyli $p = \frac{5}{4}s$, więc piłka była droższa od skakanki o **25%**.

2. Przekształcamy: $e = \frac{7}{d}, d = \frac{10}{c}, c = \frac{3}{b}, b = \frac{2}{a}$. Dalej rozpisujemy: $\frac{e}{a} = \frac{7}{ad} = \frac{7c}{10a} = \frac{21c}{10ab} = \frac{21a}{20a} = \frac{21}{20}$.

3. **W stosunku 1:2**. Oznaczmy długości boków prostokąta jako a, b, a długości na jakie został podzielony bok b jako $x, b-x$. Prostokąt został podzielony na trójkąt i trapez. Z podanego stosunku pól wnioskujemy, że pole trójkąta stanowi $\frac{1}{6}$ pola prostokąta. Zapisujemy zatem zależność: $\frac{ax}{2} = \frac{ab}{6}$. Stąd $x = \frac{b}{3}$. Zatem bok został podzielony w stosunku 1:2.

4. **O godzinie 12:12.** Wskazówka minutowa pokonuje kąt $360°$ w ciągu godziny, zatem w minutę pokonuje $6°$. Wskazówka godzinowa pokonuje $360°$ w ciągu 12 godzin, więc w minutę $0.5°$. Niech t oznacza liczbę minut potrzebną do uzyskania kąta $66°$ między wskazówkami. Otrzymujemy równanie: $6t - 0.5t = 66°$. Po rozwiązaniu otrzymujemy odpowiedź $t = 12$. Zatem taka sytuacja będzie miała miejsce o 12:12.

5. **Ania urodziła się w 2015 roku, a Ewa w 1997 roku.**
Jeśli któraś z nich urodziła się przed 2000 rokiem, to może mieć maksymalnie 28 $(1+9+9+9)$ lat, czyli urodziła się najwcześniej w 1995 roku. Niech y będzie ostatnią cyfrą roku urodzenia. Otrzymujemy równanie: $1+9+9+y = 2023-(1990+y)$. Zatem $y = 7$. Stąd wniosek, że 1997 to rok urodzenia Ewy, a Ania musiała się urodzić po 1999 roku. Rozważamy dwa przypadki: pierwszy - Ania urodziła się przed 2010 rokiem. Niech y będzie ostatnią cyfrą roku urodzenia. Wtedy otrzymujemy równanie: $2+0+0+y = 2023-(2000+y)$. Nie istnieje rozwiązanie dla $y < 10$. Przechodzimy więc do drugiego przypadku - Ania urodziła się po 2009 roku. Wtedy otrzymujemy równanie: $2+0+1+y = 2023-(2010+y)$. Stąd $y = 5$. Zatem Ania urodziła się w 2015 roku.

6. **Tak.** Dodajmy do siebie $a+b$ oraz $a-b$. Otrzymamy liczbę $2a$, która musi być podzielna przez 22, jako suma dwóch liczb podzielnych przez 22. Zatem a jest podzielne przez 11. Po odjęciu od siebie $a+b$ i $a-b$ otrzymamy $2b$, zatem analogicznie b jest podzielne przez 11.

7. **Tak.** Oznaczmy wierzchołki trójkąta, tak, żeby $|AB| = 11, |AC| = 5$. Należy rozpatrzyć dwa przypadki.
   - Jeśli trójkąt nie jest rozwartokątny lub kąt rozwarty znajduje się naprzeciwko boku AB, to na bok AB opuszczamy wysokość CD. Ze wzoru na pole trójkąta otrzymujemy: $22 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD|$. Stąd $|CD| = 4$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC otrzymujemy : $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$. Stąd $|AD| = 3$, zatem $|DB| = 8$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBC otrzymujemy : $|DB|^2 + |CD|^2 = |CB|^2$. $|CB|^2 = 4^2 + 8^2 = 80$. $|CB| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
   - Trójkąt jest rozwartokątny, kąt rozwarty znajduje się przy wierzchołku A. Opuszczamy wysokość CD na przedłużenie boku AB. Analogicznie obliczamy jej długość, $|CD| = 4$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DAC otrzymujemy : $|DA|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$. Stąd $|AD| = 3$, zatem $|DB| = 14$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DBC otrzymujemy : $|DB|^2 + |CD|^2 = |CB|^2$. $|CB|^2 = 4^2 + 14^2 = 212$. $|CB| = \sqrt{212} = 2\sqrt{53}$.

8. Rozpisujemy: $6^{2022} - 6^{2021} + 8 \cdot 6^{2020} = 6^{2020} \cdot (36 - 6 + 8) = 6^{2020} \cdot 38 = 19 \cdot (2 \cdot 6^{2020})$. Zatem ta liczba dzieli się przez 19.

9. Mrówka pokona **200 cm**.
Oznaczmy długości podstaw kolejnych wierzchołków jako $x_1, x_2, ..., x_k$. Z treści zadania wynika, że $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 120$. Rozważmy pierwszy trójkąt. Jego podstawa to x_1, a wysokość to $\frac{2}{3}x_1$. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość ramienia: $\sqrt{\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}x_1\right)^2} = \frac{5}{6}x_1$. Aby wejść i zejść z tego

trójkąta, mrówka musi przejść odległość $\frac{10}{6}x_1$. Analogicznie dla każdego kolejnego trójkąta. Łącznie pokona odległość $\frac{10}{6}(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) = \frac{10}{6} \cdot 120 = 200$.

10. Pociągi miną się o 10:40. W ciągu 20 minut pierwszy pociąg przejedzie 30km. Potem będą poruszać się oba pociągi, więc możemy napisać równania na ich położenia w zależności od czasu, który minął od godziny 10:20. Niech x_1 to odległość (w kilometrach) pierwszego, a x_2 odległość drugiego pociągu od miasta A w czasie t. Możemy napisać równania: $x_1 = 30 + v_1 \cdot t$, $x_2 = 100 - v_2 \cdot t$. Przyrównujemy oba równania, aby sprawdzić, dla jakiego t położenie pociągów będzie takie samo. $30 + v_1 \cdot t = 100 - v_2 \cdot t$. Stąd $t = \frac{70}{v_1+v_2} = \frac{70}{90+120} = \frac{70}{210}$. Czyli $= \frac{1}{3}$h $=$ 20 min. Zatem pociągi miną się 20 minut po godzinie 10:20 czyli o 10:40.