Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2024/25

Eliminacje (klasy 7-8 SP)

1. Ile liczb spośród $1^2, 1^2+2^2, 1^2+2^2+3^2, \ldots 1^2+2^2+\cdots+2024^2$ dzieli się przez 3?

2. Czy istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d, że iloczyn $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ jest zakończony w systemie dziesiętnym cyframi „10”?

3. Dane są dodatnie liczby całkowite x, y. Pokaż, że jeżeli $x+y \mid x^2$, to również $x+y \mid y^2$.
Zapis $a \mid b$ oznacza „b jest podzielne przez a”.

4. Wiesio lubi przesiadywać z Babcią w kuchni, gdy ta gotuje. Babcia kupiła nową kuchenkę z nowoczesnym zegarem cyfrowym. Wiesio do dziś nie wie, po co Babci zegarek na kuchence, jeżeli już ma jeden na ścianie, ale zaczęło go intrygować, przez jaki czas w ciągu doby na wyświetlaczu zegarka kuchenki widnieje cyfra „9”? Pomóż mu z tym problemem, jeżeli wiesz że zegarek nie wyświetla sekund.

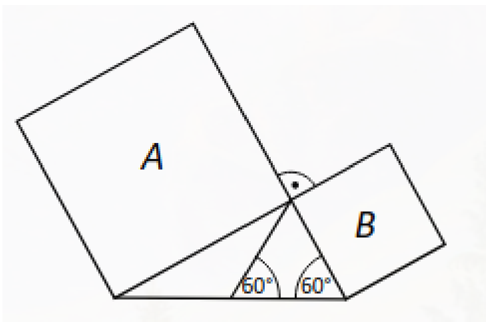
5. Dany jest pewien zbiór 13 liczb naturalnych. Wykaż, że można z tego zbioru wybrać takie dwie liczby a i b, że $a-b$ jest podzielne przez 12

6. Na bokach prostokąta $ABCD$ zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne ABE i BCF. Wykaż, że

$$|DE| = |DF|.$$

7. Trójkąt prostokątny ma jedną przyprostokątną długości 5 i przeciwprostokątną długości 13. Jak długa jest jego najkrótsza wysokość?

8. Ile razy pole kwadratu A jest większe od kwadratu B?



9. O której godzinie po raz pierwszy w ciągu doby wskazówka godzinowa tworzy z minutową kąt 220 stopni?

10. Paulina układa liczby czterocyfrowe z cyfr $7, 3, 2, 9$ (nie używa w danej liczbie tej samej cyfry wielokrotnie) w kolejności od najmniejszej do największej. Którą z tych liczb będzie 9237?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2024/25

Rozwiązania zadań (klasy 7-8 SP)

1. Rozważmy, jakie reszty z dzielenia przez 3 dają kwadraty kolejnych liczb. Liczby postaci $3k+1$ po podniesieniu do kwadratu dają resztę $(3k+1)^2 \equiv 9k^2+6k+1 \equiv 1$ modulo 3, podobnie liczby postaci $3k+2$ dają $(3k+2)^2 \equiv 9k^2+12k+4 \equiv 4 \equiv 1$ modulo 3. Zatem jedyne liczby, które podniesione do kwadratu będą podzielne przez 3 to te, które już są podzielne przez 3. W związku z tym zauważmy jakie będą reszty z dzielenia przez 3 zadanego ciągu. Widać, że cyklicznie będzie powtarzać się $1,2,2,0,1,1,2,0,0$. Skoro $2024 = 9 \cdot 224 + 8$, to będziemy mieli 224 pełnych cykli, w których są po trzy podzielne przez 3 sumy oraz fragment na końcu $1,2,2,0,1,1,2,0$ w którym będą dwie. Łącznie wśród podanych liczb będzie $224 \cdot 3 + 2 = 674$ sum kwadratów podzielnych przez 3.

2. Załóżmy, że istnieją takie liczby. Jeżeli liczba jest zakończona w systemie dziesiętnym cyframi „10" to jest podzielna przez 2, ale nie przez 4. Oznacza to że dokładnie jeden z czynników tego iloczynu musi być parzysty, reszta nieparzysta. Jednakże rozważmy:
$$(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a) = 2(a+b+c+d)$$
Jak widać, lewa strona musiałaby być nieparzysta, ale prawa jest parzysta. Sprzeczność, wobec czego takowe liczby nie mogą istnieć.

3. *Sposób 1.*
Ponieważ $y^2 - x^2 = (x+y)(y-x)$, to $y^2 = (x+y)(y-x) + x^2$ i jak widać prawa strona nierówności jest podzielna przez $x+y$, więc y^2 jest.

Sposób 2.
$y = (x+y) - x$, wobec czego $y^2 = (x+y)^2 - 2(x+y)x + x^2$, i podobnie jak w *Sposobie 1.* prawa strona jest podzielna przez $x+y$, więc y^2 też.

4. Jeżeli godzina nie używa cyfry „9", to podczas tejże godziny cyfra „9" widnieć będzie przez dokładnie 6 minut przy wskazywaniu minutnika: „09, 19, 29, 39, 49, 59". Gdy natomiast we wskazaniu godziny występuje cyfra „9", to będzie ona widnieć przez godzinę, jednakże musimy odjąć 6 minut, aby nie policzyć dwukrotnie sytuacji takich jak np.: „19:39". Wobec tego: $2 \cdot 54$ min $+ 24 \cdot 6$ min $= 252$ min $=$ 4 h 12 min.

5. Z zasady szufladkowej Dirichleta, pewne dwie z tych liczb mają taką samą resztę z dzielenia przez 12, więc po odjęciu ich od siebie otrzymamy liczbę podzielną przez 12.

6. Trójkąty DCF oraz DAE są przystające na mocy cechy bkb.

7. Z tw. Pitagorasa druga przyprostokątna ma długość 12. Z wzoru na pole trójkąta trzecia wysokość ma długość
$$\frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} < 5,$$
więc to ona jest najkrótsza.

8. Można obliczyć, że dwa z trzech kątów trójkąta (nierównobocznego) mają miary 120 i 30, zatem trzeci też ma 30 stopni i trójkąt jest równoramienny. Stąd już łatwo obliczyć pole. Mianowicie, cały trójkąt prostokątny jest wówczas trójkątem charakterystycznym $30°$, $60°$, $90°$. Oznaczmy bok kwadratu B przez b, a bok A przez a. Wiemy więc, że $a = b\sqrt{3}$, czyli pole kwadratu A jest 3 razy większe.

9. Wskazówka minutowa ma prędkość

$$\frac{360}{60} = 6$$

stopni na minutę, a wskazówka godzinowa

$$\frac{30}{60} = 0,5$$

stopnia na minutę. Zatem kąt między nimi przyrasta w tempie $5,5$ stopnia na minutę. Osiągnięcie 220 stopni zajmie zatem 40 minut.

10. Liczb zaczynających się od dowolnej cyfry jest

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$

bo mamy trzy różne cyfry dostępne raz. Ponadto, żadna liczba zaczynająca się od 9 nie jest mniejsza niż 9237, bo 2 jest najmniejszą dostępną cyfrą, 3 najmniejszą dostępną poza 2, 7 najmniejszą dostępną poza $2, 3$. Zatem od 9237 jest 18 mniejszych liczb, więc ona sama jest 19.