Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 2 (licea, runda eliminacyjna)

1. Uporządkowaną parę liczb (a,b) nazwiemy *olimpijską*, jeśli $a-b=ab$. Znajdź wszystkie olimpijskie pary liczb całkowitych.

2. Rozwiąż nierówność $(0{,}6)^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} < \left(\frac{27}{125}\right)^3$ dla rzeczywistych wartości x.

3. Dany jest okrąg ω o równaniu $x^2+y^2=r^2$ oraz prosta ℓ dana równaniem $y=-x+r$, dla pewnego $r>0$. Czy może się zdarzyć, że okrąg ω i prosta ℓ są rozłączne?

4. Dany jest odcinek długości 1 i dodatnia liczba naturalna n. Skonstruuj odcinek długości $\frac{1}{\sqrt{n}}$ za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki.

5. Znajdź sumę cyfr liczby $(1\underbrace{00\ldots0}_{n}8)^2$ w zależności od $n \in \{0,1,2,\ldots\}$.

6. Czy planszę o rozmiarach 14×14 można pokryć jednym klockiem 1×1 i pewną liczbą klocków 5×3?

7. Daria i Kacper mieli jako zadanie domowe przynieść wycięte z papieru trójkąty. Dwa z boków trójkąta Darii mają długości 8 cm i 12 cm, natomiast dwa boki trójkąta Kacpra mają długości 12 cm i 20 cm. Okazało się, że trójkąty przyniesione przez Darię i Kacpra są podobne. Jaka może być skala tego podobieństwa?

8. Podaj największą liczbę całkowitą k taką, że dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi podzielność $2^k | n^{4^4}-n^{2^2}$.

9. Wyznacz wszystkie $x\in\mathbb{R}$, dla których zachodzi równość

$$-2\cos^2 x+\cos 2x+\sin 2x-\sin^2 x=0.$$

10. Antek i Bartek mają dwa stosiki liczące odpowiednio n i m kamieni. Będą wykonywać ruchy naprzemiennie, zaczynając od Antka. W każdym ruchu można zdjąć z jednego ze stosików dowolną niezerową liczbę kamieni. Grę przegrywa ten gracz, który nie będzie mógł wykonać ruchu (wówczas drugi gracz wygrywa). Wyznacz, w zależności od n i m, który z graczy może wygrać niezależnie od postępowania drugiego gracza.

1. Zauważmy, że skoro $-1-b=-b$ dla każdego b, to $a\neq 1$. Przekształćmy równoważnie równanie, które mają spełniać liczby a,b.

$$a-b=ab \iff b+ab=x \iff b(1+a)=a \iff b=\frac{a}{1+a}.$$

Ostatnia równoważność zachodzi ze względu na to, że $a\neq -1$.
Skoro b jest liczbą całkowitą, to wystarczy znaleźć wszystkie takie a, że $1+a|a$. Ta podzielność nie może zachodzić, gdy $a\in\mathbb{N}_+$, bo $1+a>a$ i $a>0$, zachodzi natomiast, gdy $a=0$. Rozważmy $a<-1$. Zauważmy, że $1+a|a \iff -a-1|-a$. Ta podzielność zachodzi dla $a<1$ tylko wtedy, gdy $a=-2$, bo 2 jest jedyną liczbą naturalną, która jest podzielna przez liczbę o 1 od niej mniejszą. Zatem $(0,0)$ i $(-2,2)$ to jedyne dwie olimpijskie pary liczb całkowitych.

Za dzielenie przez zero odejmujemy 3 punkty, za pominięcie jednej z par odejmujemy 6 punktów. Za każdą błędnie wskazaną parę odejmujemy dwa punkty. (Oczywiście można odebrać maksymalnie 10 punktów.)

2. Sprowadźmy podstawy do potęg liczby $\frac{3}{5}$. $0{,}6=\frac{3}{5}$, $\frac{25}{9}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ oraz $\frac{27}{125}=\left(\frac{3}{5}\right)^{3}$. Nasza nierówność przyjmuje postać $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}\cdot\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right)^{x^2-12}<\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{3}\right)^{3}$, co jest równoważne temu, że $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-2x^2+24}<\left(\frac{3}{5}\right)^{9}$. Ponieważ $0<\frac{3}{5}<1$, to funkcja $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}$ jest malejąca, zatem musimy rozwiązać nierówność $x-2x^2+24>9$.

$$x-2x^2+24>9 \iff x-2x^2+15>0 \iff (-2x+6)\left(x+\frac{5}{2}\right)>0 \iff x\in\left(-\frac{5}{2},3\right)$$

Za drobne błędy rachunkowe odejmujemy do dwóch punktów, a za zmianę strony nierówności (np. przy korzystaniu z monotoniczności funkcji $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}$ lub przy rozwiązywaniu nierówności kwadratowej) każdorazowo odejmujemy trzy punkty.

3. **Sposób I:** Zauważmy, że punkty $A=(0,r)$ oraz $B=(r,0)$ spełniają zarówno równanie prostej ℓ jak i równanie okręgu ω. Zatem prosta i okrąg mają dwa punkty wspólne i w związku z tym nie są rozłączne.
Sposób II: Z równania okręgu ω wynika, że jest to okrąg położony w środku układu współrzędnych o promieniu r. Przekształćmy równanie ℓ do postaci ogólnej: $x+y-r=0$. Policzymy odległość środka układu współrzędnych od prostej ℓ.

$$d(\ell,O)=\frac{|1\cdot 0+1\cdot 0-r|}{\sqrt{1+1}}=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

Ponieważ $\frac{r}{\sqrt{2}}<r$, to prosta ℓ przecina się z okręgiem w dwóch punktach, czyli nie może być z nim rozłączna.
Wynik: Nie, okrąg ω i prosta ℓ nie mogą być rozłączne.

Za błąd rachunkowy (tj. niewynikający z nieznajomości wzoru) przy obliczaniu odległości prostej ℓ od środka układu współrzędnych odejmujemy dwa punkty. Za obliczenie tej samej odległości przy użyciu nieprawidłowego wzoru odejmujemy trzy punkty.

4. Najpierw uzyskamy odcinek długości $\sqrt{n}$:
Sposób I: Narysujmy prostą ℓ, a następnie odłóżmy na niej odcinek długości $n+1$ o końcach A i B oraz punkt D wewnątrz odcinka AB taki, że $|AD| = 1$. Następnie znajdujemy środek odcinka AB w następujący sposób: zakreślamy okręgi o równych promieniach większych niż długość odcinka AB o środkach w A oraz w B. Punkty przecięcia tych dwóch okręgów znajdują się na symetralnej odcinka AB, zatem prosta poprowadzona przez te dwa punkty jest symetralną, czyli przecina odcinek AB w połowie. Następnie rysujemy okrąg ω o średnicy AB. Później rysujemy prostą k prostopadłą do ℓ o środku w D w następujący sposób: rysujemy okrąg o środku w D, a następnie oznaczamy punkty przecięcia tego okręgu z prostą ℓ jako P i Q. Następnie konstruujemy k jako symetralną odcinka PQ w sposób podany już wyżej. Następnie oznaczamy jeden z punktów przecięcia k i ω jako C. Zauważmy, że trójkąt ABC jest prostokątny, bo $\sphericalangle ACB$ jest oparty na średnicy okręgu ω. Trójkąty ACD i BCD są podobne, a w związku z tym

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|AD|}$$

z czego od razu wynika

$$|CD| = \sqrt{1 \cdot n} = \sqrt{n}.$$

Sposób II (indukcyjny): Oczywiście mamy już odcinek długości $\sqrt{1} = 1$. Załóżmy, że mamy odcinek długości $\sqrt{n-1}$. Wyznaczmy dwie proste prostopadłe k i ℓ przecinające się w punkcie X. Na prostej k zaznaczmy cyrklem punkt A odległy o X o 1, a na prostej ℓ zaznaczmy punkt B odległy od X o $\sqrt{n-1}$. Wówczas, z twierdzenia Pitagorasa, odcinek AB będzie miał długość $\sqrt{n}$.

Skoro $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n}$, to by uzyskać odcinek długości $\frac{1}{\sqrt{n}}$ wystarczy podzielić odcinek długości $\sqrt{n}$ na n równych części.

Zaznaczmy na pewnej prostej m cyrklem $n+1$ punktów $A_0, A_1, \ldots, A_n$ takich, że każde dwa kolejne punkty A_i, A_{i+1} są oddalone od siebie o 1. Zaznaczmy na jednej z półpłaszczyzn wyznaczanych przez tę prostą odcinek PQ o długości $\sqrt{n}$. Niech X oznacza punkty przecięcia prostych A_0P i A_nQ. Wówczas proste $XA_1, XA_2, \ldots, XA_{n-1}$ podzielą odcinek PQ na n równych części, z których każda będzie miała długość $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Za nieprawidłowe przeprowadzenie rozumowania indukcyjnego odejmujemy od 3 do 6 punktów.

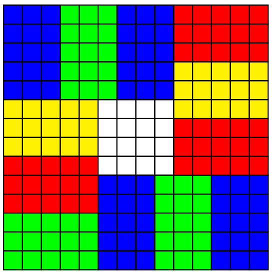
5. $(1\underbrace{00\ldots0}_{n}8)^2 = (10^{n+1}+8)^2 = 10^{2n+2}+1{,}6\cdot10^{n+2}+64$. Zauważmy, że dla $n > 0$ zachodzi $2n+2 > n+2$, zatem $10^{2n+2} > 10^{n+2} > 1{,}6 \cdot 10^{n+1}$ oraz w zapisie dziesiętnym liczby 10^{n+1} występują na końcu dwa zera. Zatem wtedy $(1\underbrace{00\ldots0}_{n}8)^2 = 1\underbrace{00\ldots0}_{m}16\underbrace{00\ldots0}_{k}64$, gdzie $m, k \in \{0, 1, 2\ldots\}$. Czyli dla $n > 0$ suma cyfr wynosi $1+1+6+6+4 = 18$, a dla $n = 0$ wynosi $3+2+4 = 9$ (bo $18^2 = 324$).

Za pominięcie przypadku, gdy $n = 0$ odejmujemy 5 punktów, za drobne luki w argumentacji, dlaczego liczba ma postać $(1\underbrace{00\ldots0}_{n}8)^2 = 1\underbrace{00\ldots0}_{m}16\underbrace{00\ldots0}_{k}64$ odejmujemy do trzech punktów, a za błędy rachunkowe, niewpływające na metodę rozwiązania zadania odejmujemy do dwóch punktów.

6. Wyznaczmy orientacje klocków 5×3 w najniższym rzędzie planszy. Oczywiście w tym rzędzie nie może wystąpić klocek 1×1, bo wówczas nie dałoby się pokryć pola nad nim. Niech k oznacza liczbę klocków poziomych, a ℓ liczbę klocków pionowych w tym rzędzie. Zachodzi równość $5k + 3\ell = 14$, a jedyną parą nieujemnych liczb całkowitych spełniających tę równość jest $(k, \ell) = (1, 3)$.

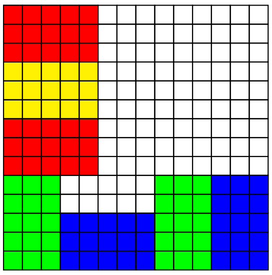
Stąd mamy dwa przypadki:

(a) Jedyny klocek poziomy w tym rzędzie jest na skrajnej pozycji. Bez straty ogólności załóżmy, że jest po lewej stronie. Wówczas w najbardziej prawej kolumnie muszą wystąpić trzy klocki poziome (analogiczny argument jak przy wyznaczaniu orientacji w najniższym rzędzie). Analogicznie można wyznaczyć orientacje klocków w najwyższym rzędzie i lewej kolumnie.



W tym przypadku uzyskujemy sprzeczność, bo nie możemy wypełnić pól w środku.

(b) Jedyny klocek poziomy w tym rzędzie jest między klockiem pionowym a dwoma klockami pionowymi. Bez straty ogólności załóżmy, że jest po lewej stronie. Wówczas, analogicznie jak przy początkowym wyznaczaniu orientacji, możemy wyznaczyć orientacje klocków w lewej.



W tym przypadku również uzyskujemy sprzeczność, bo nie możemy wypełnić kwadratu pól 2×2 między niebieskim poziomym klockiem a czerwonym poziomym klockiem.

Za rozpatrzenie tylko jednego przypadku rozmieszczenia klocków za całe rozwiązanie przyznajemy 3 punkty.

7. *Uwaga: Wszystkie długości boków w tym rozwiązaniu wyrażone są w centymetrach*
Oznaczmy boki trójkąta Darii jako d_1, d_2, d_3, a trójkąta Kacpra jako k_1, k_2, k_3, gdzie $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ i $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Zauważmy, że nie może się tak zdarzyć, że $d_i = 8, k_i = 12, d_j = 12, k_j = 20$, gdzie $i \in \{1, 2\}, j \in \{2, 3\}, i < j$. Zatem do rozważenia jest 6 przypadków:

(a) $d_1 = 8, d_2 = 12, d_3 = \frac{40}{3}$, $k_1 = 12, k_2 = 18, k_3 = 20$
Skala podobieństwa trójkąta Kacpra do trójkąta Darii wynosi $\frac{3}{2}$.

(b) $d_1 = 8, d_2 = 12, d_3 = 20$, $k_1 = 8, k_2 = 12, k_3 = 20$
Skala podobieństwa trójkąta Kacpra do trójkąta Darii wynosi 1.

(c) $d_1 = \frac{24}{5}, d_2 = 8, d_3 = 12$, $k_1 = 12, k_2 = 20, k_3 = 30$
Skala podobieństwa trójkąta Kacpra do trójkąta Darii wynosi $\frac{5}{2}$.

(d) $d_1 = \frac{36}{5}, d_2 = 8, d_3 = 12$, $k_1 = 12, k_2 = \frac{40}{3}, k_3 = 20$
Skala podobieństwa trójkąta Kacpra do trójkąta Darii wynosi $\frac{5}{3}$.
We wszystkich powyższych czterech przypadkach spełniony jest warunek istnienia trójkąta.

(e) $d_1 = 8, d_3 = 12, k_1 = 12, k_2 = 20$. Wtedy skala podobieństwa trójkąta Kacpra do trójkąta Darii wynosi $\frac{3}{2}$, czyli $d_2 = \frac{40}{3} > 12 = d_3$, co jest sprzeczne z poczynionymi wcześniej założeniami o d_2 i d_3.

(f) $d_1 = 8, d_3 = 12, k_2 = 12, k_2 = 20$. Wtedy skala podobieństwa trójkąta Kacpra do trójkąta Darii wynosi $\frac{5}{3}$, czyli $d_2 = \frac{36}{5} < 8 = d_1$, co jest sprzeczne z poczynionymi wcześniej założeniami o d_1 i d_2.

Zatem możliwe skale podobieństwa trójkąta Kacpra do trójkąta Darii to $\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}$.

Za zaniedbanie w rozwiązaniu warunku istnienia trójkąta odejmujemy trzy punkty, za pominięcie któregokolwiek z przypadków lub błędne wskazanie istnienia lub nie istnienia trójkąta o danych bokach każdorazowo odejmujemy po dwa punkty

8. Zapiszmy wyrażenie z treści zadania korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

$$n^{4^4} - n^{2^2} = n^{256} - n^4 = n^4(n^{252} - 1) = n^4(n^{126} - 1)(n^{126} + 1) = n^4(n^{53} - 1)(n^{53} + 1)(n^{126} + 1)$$

Pokażemy, że zapisane wyżej wyrażenie jest podzielne przez 2^4 dla każdego n:

(a) jeżeli n jest parzyste, to czynnik n^4 będzie iloczynem czterech liczb parzystych, zatem będzie podzielny przez 2^4;

(b) jeżeli n jest nieparzyste, to liczby $n^{53} - 1, n^{53} + 1, n^{126} + 1$ będą parzyste, a dodatkowo liczby $n^{53} - 1$ i $n^{53} + 1$ będą kolejnymi liczbami parzystymi, więc któraś z nich będzie podzielna przez 4; stąd iloczyn liczby podzielnej przez 4 i dwóch liczb parzystych będzie podzielny przez 2^4.

W ten sposób pokazaliśmy, że $k \geq 4$. Teraz wystarczy wykazać, że to ograniczenie na k jest optymalne – dla $n = 2$ mamy

$$2^{4^4} - 2^{2^2} = 2^{256} - 2^4 = 2^4 \cdot (2^{252} - 1).$$

Liczba powyżej będzie podzielna przez 2^4, ale już nie przez 2^5, więc $k \leq 4$ i w połączeniu z początkowym rezultatem uzyskujemy $k = 4$.

Za udowodnienie nierówności $k \geq 3$ przyznajemy 2 punkty. Za udowodnienie nierówności $k \geq 4$ przyznajemy 7 punktów (te punkty nie sumują się z tymi za $k \geq 3$). Za sprawdzenie optymalności rozwiązania lub równoważnie udowodnienie nierówności $k \leq 4$ przyznajemy 3 punkty (sumując z poprzednimi wymienionymi punktami).

9.

$$\begin{aligned}
& -2\cos^2 x + \cos 2x + \sin 2x - \sin^2 x = \\
&= -2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x = \\
&= -\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x - \sin^2 x = \\
&= -(\cos x - \sin x)^2 - \sin^2 x = 0 \iff \\
\iff & \left(\cos x = \sin x \wedge \sin^2 x = 0\right) \iff \\
\iff & \left(x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \wedge x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\right) \iff x \in \emptyset
\end{aligned}$$

Za błędne wyznaczenie x, dla których $\sin x = \cos x$ odejmujemy od dwóch do czterech punktów.

10. Jeżeli $n = m$, to Bartek może wygrać niezależnie od ruchów Antka, zabierając tyle kamieni z wyższego stosu, aby na obu stosikach było tyle samo kamieni. Zauważmy, że zawsze może tak zrobić: taki ruch jest niemożliwy dokładnie wtedy, gdy na obu stosikach jest tyle samo kamieni, czyli podczas ruchu Antka. Wtedy przed ruchem Bartka oba stosy nie mogą być równe, czyli na którymś z nich musi się znajdować przynajmniej jeden kamień, zatem zawsze będzie mógł on wykonać ruch.
Jeśli $n \neq m$, to strategię wygrywającą (identyczną jak w poprzednim przypadku) ma Antek.

Za rozważenie tylko jednego z dwóch przypadków odejmujemy sześć punktów. Za niedokładną argumentację, dlaczego ruch gracza posiadającego pozycję wygrywającą jest możliwy, odejmujemy trzy punkty.