Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Mecz 2 (licea, runda eliminacyjna)

Uwaga: Przypominamy, że zgodnie z regulaminem DMM dozwolone jest używanie kalkulatorów prostych w przygotowaniach. Nie może to jednak stanowić elementu rozwiązania zadania.

Uwaga: Można przyjąć, że $\pi = 3{,}141592653589\ldots$.

1. Na ile sposobów można posadzić Adama, Bartka, Cecylię, Dorotę i Eryka na ławce w taki sposób, żeby Cecylia i Dorota siedziały obok siebie?

2. W ogrodzie dookoła okrągłej altany o średnicy $3\,\mathrm{m}$ rosną trzy jabłonki. Ogrodnik zauważył, że jeśli połączymy odcinkiem środki dowolnych dwóch z nich, to ten odcinek będzie styczny do boku altany. Ponadto trójkąt wyznaczony przez środki trzech jabłonek ma pole $14\,\mathrm{m}^2$. Czy może się zdarzyć, że wszystkie odległości pomiędzy środkami drzewek liczone w metrach są całkowite?

3. W Hedronii obowiązują ścisłe wymogi dotyczące budowy uli – musi istnieć takie ustawienie pszczół, że żadne dwie z nich nie znajdują się w odległości mniejszej bądź równej $\sqrt{3}\,\mathrm{dm}$ od siebie. Czy sześcienny ul o objętości $1\,\mathrm{m}^3$ może pomieścić 1001 pszczół?

4. Która z liczb $(2+\sqrt{2}+\sqrt{3})(2+\sqrt{2}-\sqrt{3})(2-\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{2}-\sqrt{3})$ i $\sqrt{483}-\sqrt{2022}$ jest większa?

5. Niech a będzie niezerową liczbą rzeczywistą. Czy istnieje taka liczba rzeczywista dodatnia m niebędąca liczbą 1, że odległość punktu $(1, a)$ od wykresu funkcji $f(x) = \log_m x$ jest najmniejsza?

6. Niech $f(x) = |x^2-6x-7|-9$. Niech $g(m)$ oznacza liczbę rzeczywistych rozwiązań równania $f(x) = m$. Naszkicuj wykres funkcji g i zbadaj jej ciągłość.

7. Oblicz objętość równoległościanu, którego wszystkie ściany są rombami o bokach długości a i kątach ostrych o mierze α.

8. O funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiemy, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $|f(x) - f(y)| \le 10|x-y|$ i dla wszystkich par liczb (x, y) takich, że $|x-y| \ge 10$ zachodzi $|f(x) - f(y)| \le |x-y|$. Udowodnij, że $|f(6) - f(0)| \le 50$.

9. Czy dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość
$$\sum_{\substack{j+k+m<n\\ j,k,m\ge 1}} \binom{n-1}{k-1}\binom{n-k-1}{j-1}\binom{n-k-j-1}{m-1}\frac{n(n-j)(n-k-j)}{jkm} = 4^n - 4\cdot 3^n + 6\cdot 2^n - 4\ ?$$

10. Niech ω będzie okręgiem o promieniu 1. Niech ABC będzie trójkątem wpisanym w okrąg ω, który ma największe pole powierzchni spośród wszystkich trójkątów, które można wpisać w okrąg ω. Niech α, β i γ będą miarami kątów wewnętrznych przy wierzchołkach tego trójkąta (podanymi w radianach). Wyznacz z dokładnością do trzech miejsc po przecinku liczbę
$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}.$$

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

mecz 1 – rozwiązania (licea, runda eliminacyjna)

1. Jeżeli potraktujemy Celinę i Dorotę jakby zajmowały tylko 1 miejsce na ławce, wszystkie osoby można usadzić na 4! sposobów. Wówczas trzeba jednak wybrać jeszcze w jakiej kolejności siedzą dziewczyny – można to zrobić na 2 sposoby. Zatem Adama, Bartka, Cecylię, Dorotę i Eryka można posadzić na ławce na $4! \cdot 2 = 48$ sposobów.

2. Nie, nie może się tak zdarzyć. Ze wzoru na pole trójkąta wiemy, że

$$P = \frac{a+b+c}{2}r,$$

a zatem

$$a+b+c = \frac{2P}{r} = \frac{2 \cdot 14\,\mathrm{m}^2}{1{,}5\,\mathrm{m}} = \frac{280}{15}\,\mathrm{m},$$

co nie jest liczbą całkowitą. Zatem co najmniej jedna z liczb a, b, c nie może być całkowita.

3. Taki ul nie może pomieścić 1001 pszczół. Podzielmy ul na 1000 sześcianów o równej objętości. Zgodnie z zasadą szufladkową, jeśli umieścimy w ulu 1001 pszczół, to przynajmniej dwie z nich znajdą się wewnątrz jednego sześcianu. Maksymalna odległość między dwoma punktami w takim sześcianie, to $\sqrt{3}\,\mathrm{dm}$, zatem nie jest spełniony wymóg dotyczący minimalnej odległości każdych dwóch pszczół od siebie nawzajem.

4. Uprośćmy najpierw pierwszą z liczb. Ze wzorów skróconego mnożenia dostajemy:

$$((2+\sqrt{2})+\sqrt{3})((2+\sqrt{2})-\sqrt{3})((2-\sqrt{2})+\sqrt{3})((2-\sqrt{2})-\sqrt{3}) = (4+4\sqrt{2}+2-3)(4-4\sqrt{2}+2-3)$$
$$= (3+4\sqrt{2})(3-4\sqrt{2}) = 9-32 = -23.$$

Pokażemy, że druga z liczb jest większa, to znaczy $-23 < \sqrt{483} - \sqrt{2022}$. Istotnie, mamy:

$$\begin{aligned}
-23 &< \sqrt{483} - \sqrt{2022} \\
23 &> \sqrt{2022} - \sqrt{483} \\
529 &> 2022 - 2\sqrt{2022 \cdot 483} + 483 \\
2\sqrt{2022 \cdot 483} &> 1976 \\
\sqrt{2022 \cdot 483} &> 988 \\
2022 \cdot 483 &> 988^2 \\
976626 &> 976144.
\end{aligned}$$

Wszystkie przejścia były równoważne (w tym przy podnoszeniu do kwadratu obie liczby były dodatnie), zatem druga z liczb jest większa.

Uwaga. Za regulaminem meczu „Dozwolone jest używanie kalkulatorów prostych w przygotowaniach, nie może to jednak stanowić elementu rozwiązania zadania”.

5. Pokażemy, że takie m nie istnieje. Zauważmy, że $(1, a)$ nigdy nie należy do wykresu funkcji f, bo $\log_m 1 = 0 \neq a$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie małą liczbą dodatnią. Wtedy możemy rozwiązać następujące równanie:

$$f(1+\varepsilon) = \log_m(1+\varepsilon) = a$$

$$m^a = 1 + \varepsilon$$

$$m = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{a}}$$

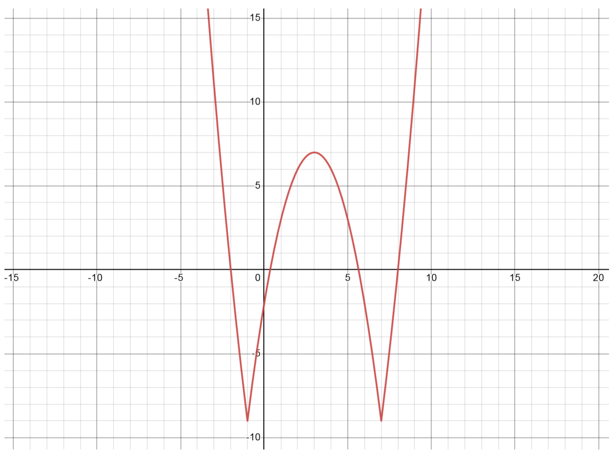
Stąd dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie m, dla którego odległość punktu $(1, a)$ od wykresu funkcji $x \mapsto \log_m x$ nie przekracza ε, a więc zmieniając m możemy uzyskać dowolnie małą żądaną odległość, jednak nigdy nie będzie ona zerem. Wobec tego nie istnieje m zapewniające najmniejszą odległość punktu $(1, a)$ od wykresu funkcji $x \mapsto \log_m x$.

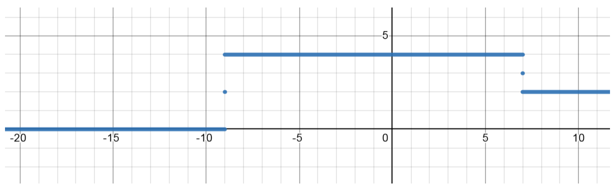
6. Rozważmy kilka przypadków:

- $m \in (-\infty, -9)$:
  Wówczas mamy $|x^2 - 6x - 7| < 0$, a ta nierówność ma 0 rozwiązań. Zatem dla $m \in (-\infty, -9)$ mamy $g(m) = 0$.
- $m = -9$:
  Wówczas mamy $|x^2 - 6x - 7| = 0$, a to równanie ma 2 rozwiązania: $x = -1$ i $x = 7$. Zatem dla $g(-9) = 2$.
- $m \in (-9, 7)$:
  Wówczas mamy $|x^2 - 6x - 7| \in (0, 16)$, a każda liczba ze zbioru $(0, 16)$ występuje jako wartość $|x^2 - 6x - 7|$ dla dokładnie czterech różnych rzeczywistych argumentów x. Stąd dla $m \in (-9, 7)$ mamy $g(m) = 4$.
- $m = 7$:
  Wówczas mamy $|x^2 - 6x - 7| = 16$, a to równanie ma 3 rozwiązania: $x = 3 - 4\sqrt{2}$, $x = 3$, $x = 3 + 4\sqrt{2}$. Stąd $g(7) = 3$.
- $m > 7$:
  Wówczas mamy $|x^2 - 6x - 7| \in (16, +\infty)$, a każda liczba ze zbioru $(16, +\infty)$ występuje jako wartość $|x^2 - 6x - 7|$ dla dokładnie dwóch różnych rzeczywistych argumentów x. Stąd dla $m > 7$ mamy $g(m) = 2$.

Funkcja g jest nieciągła w punktach $x \in \{-9, 7\}$, a w pozostałych jest ciągła.

Poniżej przedstawiamy wykres funkcji f i wykres funkcji g.





7. Niech $ABCD$ i $A'B'C'D'$ będą podstawami równoległościanu, a jego krawędziami bocznymi AA', BB', CC' i DD'. Niech kąty ostre rombów w podstawach będą przy wierzchołkach A, B, A' i B'.

Rozważmy ostrosłup $ABDA'$. Z twierdzenia cosinusów $|A'B|^2 = a^2(1-\cos\alpha)$. Zauważamy, że trójkąt $A'BD$ jest równoboczny. Wtedy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}.$$

Zauważmy, że rozważany ostrosłup $ABDA'$ jest prawidłowy, bo krawędzie AB, AA' i AD są równej długości. Wtedy spodek wysokości tego ostrosłupa opuszczonej z wierzchołka A jest też środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A'BD$. Oznaczmy długość tej wysokości jako h. Wtedy

$$h^2 = a^2 - \frac{2}{3}(1-\cos\alpha)a^2 = a^2\left(1 - \frac{2}{3}\cos\alpha\right) = \frac{a^2(1+2\cos\alpha)}{3}$$

. Oznaczmy długość wysokości opuszczonej z A' tego ostrosłupa będącej zarazem wysokością całego równoległościanu jako H, a pole $ABCD$ jako P_p Zatem mamy

$$V_{ABDA'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_pH = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a^2(1-\cos\alpha)\cdot a\sqrt{1+2\cos\alpha}}{4\sqrt{3}}$$

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = P_pH = a^3(1-\cos\alpha)\sqrt{1+2\cos\alpha}$$

8. W celu rozwiązania zadania skorzystamy z nierówności trójkąta:

$$|f(6)-f(0)| = |(f(10)-f(0)) + (f(6)-f(10))| \leq |f(10)-f(0)| + |f(6)-f(10)| \leq 10+40 = 50.$$

9. Przekształcamy równość z tezy zadania w następujący sposób:

$$\sum_{\substack{j+k+m<n \\ j,k,m\geq 1}} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}\binom{n-k-j}{m} = \binom{4}{0}4^n - \binom{4}{1}\cdot 3^n + \binom{4}{2}\cdot 2^n - \binom{4}{3}\cdot 1^n$$

Zauważamy, że obie strony mają identyczną interpretację kombinatoryczną. Mamy n przedmiotów i chcemy je przenieść do 4 rozróżnialnych worków w taki sposób, że w każdym worku jest co najmniej jeden przedmiot. Po lewej stronie nierówności najpierw ustalamy liczby j, k, m przedmiotów, które trafią do trzech pierwszych worków, jednocześnie wiedząc, że $n-j-k-m$ trafi do ostatniego. Po prawej stronie każdemu przedmiotowi przypisujemy po kolei worek, do którego trafia i odrzucamy przypadki, gdy do któregoś worka nie trafia żaden element, korzystając z zasady włączeń i wyłączeń. Toteż równość zachodzi.

10. Rozważmy jakikolwiek trójkąt ABC wpisany w ω. Pokażemy, że jeżeli nie jest on równoboczny, to możemy znaleźć trójkąt o większym polu, a więc udowodnimy tym samym, że optymalny jest trójkąt równoboczny.

Jeżeli trójkąt ABC nie jest równoboczny, to bez straty ogólności możemy założyć, że $|AB| \neq |AC|$. By zwiększyć pole trójkąta możemy przesunąć punkt A na środek dłuższego łuku BC na okręgu ω – wówczas wysokość z punktu A się wydłuży, bo środek dłuższego łuku BC jest punktem najdalszym od prostej BC na okręgu ω.

Stąd w optymalnym trójkącie ABC mamy $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Na podstawie uwagi w nagłówku listy zadań można ustalić, że $\pi/3 \approx 1{,}04719755$ z dokładnością do 8 cyfr po przecinku. Następnie, korzystając z tego przybliżenia, można ustalić, że $\sqrt{\pi/3} = 1{,}0233$ z dokładnością do 4 cyfr po przecinku, a stąd już bezpośrednio $3\sqrt{\pi/3} \approx 3 \cdot 1{,}0233 \approx 3{,}070$.

Część obliczeniową można przeprowadzić alternatywnie z obserwacją $3\sqrt{\pi/3} = \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{3}$.