Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2024/25

Eliminacje (klasy 4-6 SP)

1. W sylwestrową noc komputer Melanii napisał na ekranie 300-cyfrową liczbę, której kolejne cyfry to

$$2, 0, 2, 4, 2, 0, 2, 4, 2, 0, 2, 4 \ldots$$

Jaka jest reszta z dzielenia przez 27 kwadratu tej liczby?

2. Wybieramy jedną z przekątnych dziewięciokąta wypukłego. Ile co najwyżej innych przekątnych może przecinać tę, którą wybraliśmy? Przekątnych o wspólnym końcu nie uznajemy za przecinające się.

3. W pewnym miesiącu trzy niedziele wypadły w dni parzyste. Jaki dzień tygodnia wypadł dwudziestego dnia tego miesiąca?

4. Spośród stwierdzeń o pewnej liczbie naturalnej N: „N jest podzielne przez 3", „Njest podzielne przez 4", „N jest podzielne przez 12", „N jest podzielne przez 24" trzy są prawdziwe, a jedno fałszywe. Które z nich jest fałszywe?

5. Na kawałku kartki w kratkę o wymiarach 5 na 5 kratek w każdej kratce została umieszczona jedna tresowana pchła. Po wydaniu odpowiedniej komendy, każda z pcheł przeskakuje do jednej z kratek o wspólnej krawędzi z kratką, na której była. Udowodnij, że po wydaniu komendy co najmniej jedna z kratek stanie się pusta.

6. Dwóch rolników, Kargul i Pawlak, kosi razem pole żyta. Wiemy, że samemu Kargul skosiłby całe pole w 37 minut, natomiast Pawlak w 27 minut. Po zakończeniu żniw Kargul miał więcej żyta od Pawlaka – różnica wynosiła 10% żyta zebranego z całego pola. Który z rolników zaczął kosić wcześniej i o ile minut?

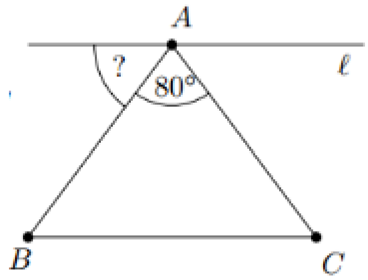
7. Udowodnij, że wsród pierwszych 402 potęg dwójki są dwie, które zgadzają się na 3 ostatnich cyfrach.

Uwaga. Liczbę $1 = 2^0$ też uznajemy za potęgę dwójki.

8. Czy pięciokąt może mieć same kąty ostre?

9. Fiona bawiła się mapą, która jest wykonana w skali 1 : 100. Narysowała na tej mapie kwadrat i zmierzyła, że jego pole (na tej mapie) wynosi $256\,\text{cm}^2$. Ile wynosiłoby pole tego kwadratu, gdyby pojawił się w rzeczywistości w tym miejscu, w którym jest na mapie?

10. W trójkącie ΔABC miara kąta przy wierzchołku A wynosi 80°, a boki AB i AC są równej długości. Przez punkt A poprowadzono prostą ℓ równoległą do prostej BC. Ile wynosi miara kąta zaznaczonego na rysunku poniżej?



Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2024/25

Rozwiązania zadań (klasy 4-6 SP)

1. Suma cyfr tej liczby to

$$75 \cdot 8,$$

więc liczba jest podzielna przez 3. To oznacza, że jej sześcian jest podzielny przez 27, więc reszta jest 0.

2. Prosta zawierająca dowolną przekątną dziewięciokąta dzieli go w ten sposób, że po obu jej stronach znajduje się odpowiednio 1 i 6 lub 2 i 5 lub 3 i 4 wierzchołków. Wobec tego największa ilość przecinających pozostałch przekątnych w pierwszej sytuacji jest równa $1 \cdot 6 = 6$, w drugiej $2 \cdot 5 = 10$, w trzeciej $3 \cdot 4 = 12$. Zatem odpowiedź to 12.

3. W tym miesiącu musiało być 5 niedziel, ponieważ po niedzieli w dzień parzysty następuje niedziela nieparzysta (dodanie 7 zmienia parzystość), a więcej niż 5 niedziel być nie może. Z tego wynika też, że pierwsza niedziela musiała przypaść na dzień parzysty. Jeżeli pierwsza niedziela wypadłaby drugiego dnia miesiąca, to układ niedziel prezentowałby się następująco: 2, 9, 16, 23, 30. Jak łatwo widzieć, pierwsza niedziela nie może wystąpić później. Skoro 23. dzień to była niedziela, to 20. to był czwartek.

4. Podzielność przez 24 implikuje podzielność przez 12, 3 i 4, więc gdyby liczba była podzielna przez 24, nie byłoby ani jednego zdania fałszywego.

5. Można pomalować kratki na kartce na czarno i biało jak na szachownicy w taki sposób, aby narożne pola były czarne. Wtedy na początku 13 pcheł jest na polach czarnych, a 12 na białych. Po wydaniu komendy każda pchła zmienia kolor kratki, na której się znajduje. 12 pcheł nie może zająć wszystkich 13 czarnych kratek, zatem co najmniej jedna z nich będzie pusta.

6. Pawlak skosił $\frac{45}{100} = \frac{9}{10}$ całego pola, a Kargul $\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$. Kargul kosił łącznie przez $37 \cdot \frac{11}{20} = \frac{407}{20}$ minut, a Pawlak $23 \cdot \frac{9}{20} = \frac{207}{20}$ minut. Zatem Kargul zaczął kosić pole wcześniej o $\frac{407}{20} - \frac{207}{20} = 10$ minut.

7. Cyfrą jedności 2^n dla $n > 0$ może być tylko 2, 4, 6 lub 8. Jest zatem co najwyżej $4 \cdot 10 \cdot 10$ możliwości na 3 ostatnie cyfry wśród **parzystych** potęg dwójki. Zatem, skoro potęg parzystych jest 401, to pewna końcówka się powtórzy z zasady szufladkowej.

8. Nie. Suma kątów pięciokąta to $540°$. Może to być obliczone np. przez podział pięciokąta na trzy trójkąty. Gdyby miał mieć same kąty ostre, to suma byłaby mniejsza niż

$$5 \cdot 90° = 450° < 540°,$$

czyli mniej niż suma kątów pięciokąta.

9. Bok tego kwadratu to $16\,\mathrm{cm}$. Zatem rzeczywisty (odwzorowany z mapy) kwadrat miałby bok $16\,\mathrm{m}$, więc jego pole wynosiłoby $256\,\mathrm{m}^2$.

10. Kąty przy ramionach trójkąta mają miary $50°$, więc zaznaczony kąt też, bo prosta BC jest równoległa do ℓ.