Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 2 (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. Ile wynosi suma wszystkich liczb trzycyfrowych, podzielnych przez 5?

2. Grzegorz Brzęczyszczykiewicz urodził się 29 lutego w piątek. Po ilu latach będzie obchodził po raz pierwszy urodziny również 29 lutego w piątek?

3. Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n, liczba n^5 ma tę samą cyfrę jedności, co n.

4. W ogródku 5 kotów poluje na 6 ptaków. Sytuację obserwuje pewna liczba psów. Gdyby psy zmieniły się w ptaki, a ptaki w psy, liczba nóg nie zmieniłaby się. Ile nóg mają wszystkie zwierzęta w sumie?

5. Czy istnieje wielokąt wypukły o 54 przekątnych? Jeśli tak, to ile ma krawędzi?

6. Władca pewnego kraju, aby pokazać delegatom z innych krain mądrość swojego narodu, zawezwał jednego ze swoich najmądrejszych magów, o imieniu Ramsey. W momencie w którym, w sali tronowej znajdował się król, 6 delegatów i mag, władca kazał Ramseyowi uzasadnić, że wśród 6 obecnych delegatów istnieje trzech, z których żadni dwaj się nie znają, albo istnieje takich trzech, że każdych dwóch się zna. A wiedzieć trzeba, że krainy te były bardzo odległe od siebie i nawet najpotężniejsi magowie nie znali innych społeczności i niewiele mogli o nich wiedzieć. Mag, jak łatwo się domyślić, z łatwością wykonał zadanie swego pana, czym zaimponował zgromadzonym. Jak tego dokonał?

7. Długości boków trójkąta ABC wynoszą $|BC| = a$, $|AC| = b$ i $|AB| = c$. Wysokość tego trójkąta wychodząca z wierzchołka A ma długość h_a, wychodząca z wierzechołka B ma długość h_b, a wychodząca z wierzchołka C ma długość h_c. Udowodnij, że

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = (h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right).$$

8. Wierzchołki jednostkowego sześcianu połączono tak, że otrzymano czworościan foremny. Jaką objętość ma otrzymana bryła?

9. Rozważmy tabelę o wymiarach 15×15. Każde pole tabeli malujemy na jeden z trzech kolorów: czerwony, zielony lub niebieski. Następnie, dla k-tego wiersza tabeli zliczamy, ile występuje w nim pól czerwonych, zielonych i niebieskich, i oznaczamy te wartości odpowiednio c_k, z_k i n_k. Otrzymaliśmy trzy ciągi: $c_1, \ldots, c_{15}$, $z_1, \ldots, z_{15}$, $k_1, \ldots, k_{15}$. Uzasadnij, że w każdym z tych ciągów któraś liczba się powtarza.

10. Ile rozwiązań całkowitych ma równanie $2^n = (n-1)n(n+1)$?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 2 - rozwiązania (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. Łączymy w pary liczby 100 i 995, następnie 105 i 990, kolejno 110 i 985 itd. Widzimy, że te pary w sumie dają za każdym razem 1095, a ponieważ wszystkie liczby, których było 180 (1000/5 i odejmujemy dwadzieścia takich liczb od 0 do 95), podzieliliśmy w pary, to tych par jest o połowę mniej, stąd wychodzi $\frac{180 \cdot 995}{2} = 89500$.

2. Rok zwykły ma 365=350+14+1 dni. Rok przestępny ma zaś 350+14+2 dni. Między kolejnymi dniami 29.02 występują trzy lata zwykłe i jeden rok przestępny – czyli pewna liczba tygodni oraz 1+1+1+2 dni. Czyli co 4 lata 29 lutego przesuwa się o 5 dni. Ale NWW$(5, 7)$=35, więc kolejny piątek 29 lutego będzie dopiero za 28 lat.

3. Trzeba pokazać, że $n^5 - n$ jest podzielna przez 10 (za tę obserwację 1 pkt).

$$n^5 - n = n(n+1)(n-1)(n^2+1)$$

Podzielność przez 2 wynika z tego, że albo n albo $n+1$ jest podzielne przez 2. Podzielność przez 5 pokażemy na 2 sposoby.

- I sposób:

  $$\begin{aligned} n(n+1)(n-1)(n^2+1) &= n(n+1)(n-1)\left((n-2)(n+2)-5\right) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) - 5n(n+1)(n-1), \end{aligned}$$

  gdzie oba czynniki ostatniej liczby są podzielne przez 5, bo wśród 5 kolejnych liczb $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ jedna dzieli się przez 5.
- II sposób: Jeżeli 5 dzieli n, $n+1$ lub $n-1$ to dostajemy tezę. Czyli wystarczy sprawdzić przypadki, gdy 5 nie dzieli żadnej z nich, czyli n daje resztę 2 lub 3 z dzielenia przez 5. Dla $n = 5k+2$

  $$n^2 + 1 = (5k+2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5(5k^2 + 4k + 1).$$

  Dla $n = 5k+3$

  $$n^2 + 1 = (5k+3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5(5k^2 + 6k + 2).$$

Za dobre rozwiązanie, ale z lukami – 6-9 pkt. Za uzasadnienie podzielności $n^5 - n$ przez 2 – 2 pkt.

4. Ptaki i koty przed zamianą miały $20 + 12 = 32$ nogi, a po zamianie (już jako koty i psy) $20 + 24 = 44$. Zyskały więc w sumie dwanaście nóg. Każdy pies, gdy zamieniał się w ptaka, tracił dwie nogi. By liczba nóg nie zmieniła się, w ogrodzie musiało być więc sześć psów. Zatem liczba wszystkich nóg to $32 + 24 = 56$.

Za złe wyznaczenie liczby psów przyznajemy maksymalnie trzy punkty.

5. Odpowiedź: Istnieje i musi mieć 12 krawędzi. Jeżeli n oznacza liczbę wierzchołków wielokąta, to wzór na liczbę jego krawędzi jest następujący

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Z każdego wierzchołka (n) możemy poprowadzić $n-3$ przekątne (nie możemy do niego samego, ani do jego punktów sąsiednich). Ale wtedy liczymy krawędzie 2 razy (bo każda krawędź łączy dwa wierzchołki). Musimy zatem sprawdzić, czy $54 = n(n-3)/2$. Okazuje się, że tak, i $n = 12$.

Za próbę policzenia krawędzi w dowolnym wielokącie, ale nieskuteczną – 0-5 pkt. Przy próbie policzenia krawędzi w dowolnym wielokącie, ale nieskutecznej:

- jeżeli nie uwzględniono wyłącznie tego, że każdą krawędź liczymy 2 razy – 5 pkt,
- jeżeli nie uwzględniono wyłącznie tego, że przekątną dostajemy tylko łącząc punkty niesąsiadujące z danym wierzchołkiem – 3 pkt.

Za podanie poprawnego wzoru bez uzasadnienia – 3 pkt. Za poprawne wyprowadzenie wzoru i błędną odpowiedź (że wielokąt nie istnieje) – 6 pkt. Za poprawne wyprowadzenie wzoru i podaną błędną liczbę krawędzi – 7 pkt.

6. Zakładamy, że jeżeli osoba A zna osobę B, to również B zna A. Ustalmy jednego z delegatów i nazwijmy go A. Załóżmy najpierw, że A zna co najmniej trzy inne osoby, np. B, C, D. Jeżeli B, C, D nie znają się wzajemnie, to uzasadnienie jest skończone, bo znaleźliśmy trzy osoby, z których żadne dwie się nie znają. W przeciwnym wypadku, jeżeli którychś dwóch delegatów z B, C, D się zna, to A i tych dwóch delegatów dają nam trzy osoby takie, że każde dwie się znają.

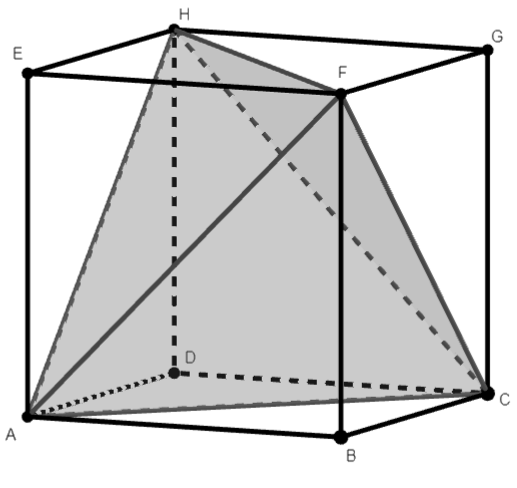
Załóżmy teraz, że A zna co najwyżej dwie osoby. Wówczas nie zna co najmniej trzech, np. nie zna B, C, D. Jeżeli w trójce B, C, D wszyscy się znają, to rozumowanie jest zakończone, bo znaleźliśmy trzy osoby takie, że każde dwie się znają. W przeciwnym wypadku, którychś dwóch delegatów z B, C, D się nie zna, to A i tych dwóch delegatów dają nam trzy osoby z których żadne dwie się nie znają.

7. Korzystając ze wzoru na pole trójkąta $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ dostajemy $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$. Wstawiając to do lewej strony równości otrzymujemy

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{2S}{h_a}+\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c}\right)\left(\frac{h_a}{2S}+\frac{h_b}{2S}+\frac{h_c}{2S}\right) = \left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)(h_a+h_b+h_c).$$

Za rozwiązanie, w którym wymnożono nawiasy, przyznajemy maksymalnie 8 pkt.

8. Odpowiedź: 1/3. Czworościan taki otrzymuje się biorąc za krawędzie wszystkie przekątne ścian sześcianu, czyli tak jak na poniższym rysunku. Jest to czworościan foremny, ponieważ jego



wszystkie cztery ściany są trójkątami równobocznymi o krawędziach długości $\sqrt{2}$. Objętość takiej figury najłatwiej policzyć odejmując od objętości sześcianu objętości ostrosłupów $ABCF$, $ACDH$, $EFHA$ i $FGHC$. Wszystkie te ostrosłupa mają taką samą objętość wynoszącą

$$\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6},$$

gdzie S to pole podstawy, a h długość wysokości na nią opuszczonej. Stąd szukana w zadaniu objętość to $1 - 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Za dobre narysowanie figury – 3 pkt. Za uzasadnienie, że tak narysowana figura to czworościan foremny przyznajemy 2 pkt. Za policzenie szukanej objętości, ale z niewielkimi błędami – 6-9 pkt.

9. Załóżmy, że w każdym wierszu liczba kratek pomalowanych tym samym kolorem jest inna. Wówczas kratek pomalowanych jednym kolorem w tej tablicy byłoby $0 + 1 + 2 + \cdots + 14 = 105$. Ponieważ mamy trzy kolory, to liczba pomalowanych kratek wynosiłaby $3 \cdot 105 = 315$. Jednak tablica ma 225 kratek. Sprzeczność ta dowodzi, że istnieją wiersze o tej samej liczby kratek pomalowanych tym samym kolorem.

10. Prawa strona jest całkowita, więc lewa strona również musi taka być. Zatem na pewno n jest nieujemna. Gdy $n \geq 2$, prawa strona jest iloczynem liczb, z których przynajmniej jedna ma w rozkładzie na czynniki pierwsze liczbę większą od 2. Prawa strona takich nie ma, więc $n \geq 2$ nie mogą być rozwiązaniem. Pozostają do sprawdzenia liczby 0 i 1, dla których prawa strona jest zerowa, a lewa nie. Zatem równanie to nie ma rozwiązań.

Za rozważenie tylko skończenie wielu przypadków nie przyznajemy punktów. Za wykluczenie liczb ujemnych – 3 pkt.