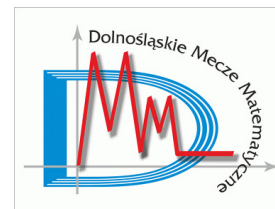


1. Ile razy trzeba zmniejszyć cenę produktu o 20%, żeby kosztował mniej niż połowa ceny początkowej?
2. Czy liczba  $5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2022}$  jest podzielna przez 10?
3. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę  $70^\circ$ . Wyznacz pozostałe kąty trójkąta, jeśli wiadomo, że wysokości AE i BF są równej długości.
4. Trzy ściany prostopadłościanu mają pola kolejno 50, 32 i 49. Jaka objętość ma ten prostopadłościan?
5. Rowerzysta wjechał na górę ze średnią prędkością 10 km/h. W drodze powrotnej przebył tę samą trasę, ale jechał ze średnią prędkością 30 km/h. Jaka była średnia prędkość rowerzysty w czasie trwania całej wycieczki?
6. Podstawy trapezu mają długość 10 i 6. Jaka długość ma odcinek łączący środki jego przekątnych?
7. W klasie przeprowadzono ankietę na temat posiadanych zwierząt domowych. Okazało się, że wśród tych osób, które mają jakieś zwierzę, 35% ma psa, 13% wszystkich uczniów tej klasy ma inne zwierzę i nikt nie ma więcej niż jednego zwierzęcia. Jaka część klasy nie ma żadnego zwierzęcia?
8. Czy wśród każdych sześciu liczb całkowitych zawsze istnieją takie dwie, że ich różnica jest podzielna przez 5?
9. Średnia rekordów życiowych w skoku w dal sześciu zawodników z pewnego klubu wynosiła 5.10m. Gdy najsłabszy zawodnik przestał trenować, średnia ta wzrosła do 5.30m. Jakim rekordem życiowym legitymował się zawodnik, który zrezygnował z treningów?
10. Jaś i Małgosia jedzą wspólnie chatkę z piernika. Nauczeni doświadczeniem, wiedzą, że zajmie im to 6 godzin. Niestety po dwóch godzinach Jasia rozboleł brzuch i resztę chatki Małgosia zjadła sama. Zajęło jej to kolejne 6 godzin. Ile czasu zajęłoby każdemu z nich samodzielne zjedzenie chatki?

---

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23  
**Mecz 2 - rozwiązania** (SP 7-8, runda eliminacyjna)

---



- 4 razy.** Oznaczmy cenę początkową jako  $x$ . Po pierwszej obniżce cena będzie wynosić  $0.8x$ , po drugiej  $0.8x \cdot 0.8 = 0.64x$ , po trzeciej  $0.64x \cdot 0.8 = 0.512x$ , po czwartej  $0.512x \cdot 0.8 = 0.4096x$ . Zatem potrzebne będą 4 obniżki o 20%.
- Tak.** Aby udowodnić, że liczba jest podzielna przez 10 należy pokazać, że jest podzielna przez 2 i przez 5. Liczba z zadania jest podzielna przez 5, bo jest sumą liczb podzielnych przez 5, a przez 2, bo jest sumą 2022 (czyli parzystości) liczb nieparzystych.
- Pozostałe kąty mają  $55^\circ$ .** Wystarczy zauważyć, że jest to trójkąt równoramienny o podstawie AB. Niech P oznacza pole trójkąta ABC. Wtedy  $P = \frac{1}{2}|AC||FB| = \frac{1}{2}|BC||AE|$ . Ponieważ  $|AE| = |BF|$ , otrzymujemy  $|AC| = |BC|$ . Oznacza to, że miara kątów przy podstawie wynosi  $\frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$ .
- 280.** Oznaczmy długości boków prostopadłościanu jako  $a, b, c$ . Bez straty ogólności możemy napisać:  $ab = 50, ac = 32, bc = 49$ . Objętość prostopadłościanu dana jest wzorem  $V = abc = \sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt{ab \cdot ac \cdot bc} = \sqrt{50 \cdot 32 \cdot 49} = \sqrt{78400} = 280$ . Za wyliczenie lub zgadnięcie poszczególnych wartości  $a, b, c$  i dopiero obliczenie objętości, odejmujemy 2 punkty, gdyż jest to niepotrzebne skomplikowanie zadania.
- 15 km/h.** Oznaczmy długość drogi w jedną stronę jako  $s$ . Oznaczmy  $v_1 = 10$  km/h,  $v_2 = 40$  km/h. Możemy policzyć czas potrzebny na przebycie drogi pod górę:  $v_1 = s/t_1$ , zatem  $t_1 = \frac{s}{v_1}$ . Analogicznie  $t_2 = \frac{s}{v_2}$ . Średnia prędkość rowerzysty na całej trasie dana jest wzorem  $v = \frac{2s}{t_1+t_2}$ . Po podstawieniu otrzymujemy:  $v = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{10} + \frac{1}{30}} = 15$ .
- Odcinek ma długość 2.** Oznaczmy  $|AB| = 10, |CD| = 6$ , środki przekątnych jako  $E, F$ , a środki ramion jako odpowiednio  $M, N$ . Zauważamy, że odcinek  $EF$  zawiera się w odcinku  $MN$ . Rozważmy trójkąt  $ABD$ .  $MF$  jest odcinkiem łączącym środki jego boków, zatem  $|MF| = \frac{1}{2}|AB| = 5$ . Z drugiej strony  $ME$  łączy środki boków trójkąta  $ACD$ , więc  $|ME| = \frac{1}{2}|DC| = 3$ .  $|EF| = |MF| - |ME| = 5 - 3 = 2$ .
- 80%.** Oznaczmy jako  $y$  liczbę osób w klasie, a jako  $x$  liczbę osób, które jakieś zwierzę. Skoro 35% właścicieli zwierząt ma psa, to 65% ma inne zwierzę. Czyli  $0.65x = 0.13y$ . Stąd wyliczamy, że  $x = 0.2y$ . Zatem 20% uczniów ma jakieś zwierzę, a 80% nie ma żadnego.
- Tak.** Różnica dwóch liczb jest podzielna przez 5, gdy obie liczby dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 5. Ponieważ mamy sześć liczb i pięć możliwych reszt, to z zasady szufladkowej przynajmniej jedna reszta się powtórzy.
- 4.1m** Możemy obliczyć sumę wyników wszystkich sześciu zawodników:  $6 \cdot 5.10m$  oraz pięciu lepszych zawodników:  $5 \cdot 5.30m$ . Wynik zawodnika, który przestał trenować to:  $6 \cdot 5.10m - 5 \cdot 5.30m = 4.1m$ .
- Małgosi zajęłoby to 9 godzin, a Jasiowi 18.** Oznaczmy czas (w godzinach) potrzebny Jasiowi do zjedzenia całej chatki jako  $j$ , a Małgosi jako  $m$ . Niech  $X$  oznacza całą chatkę. Wtedy Jaś w ciągu godziny je  $\frac{X}{j}$ , a Małgosia  $\frac{X}{m}$ . Całą chatkę zjedliby w ciągu 6 godzin, więc w ciągu dwóch pierwszych godzin zjedli jedną trzecią chatki. Mamy równanie:  $\frac{2X}{j} + \frac{2X}{m} = \frac{X}{3}$ . W ciągu kolejnych 6 godzin Małgosia zjadła pozostałą część, czyli dwie trzecie chatki. Stąd  $\frac{6X}{m} = \frac{2X}{3}$ . Rozwiązujemy równania i otrzymujemy  $m = 9$  i  $j = 18$ .