Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2024/25

Eliminacje (klasy 7-8 SP)

1. Czy trójkąt różnoboczny (tzn. taki, w którym żadne dwa boki nie mają równej długości) można podzielić na dwa przystające trójkąty?

2. Pokaż, że jeżeli ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny, to ułamek $\frac{m+n}{n}$ również.

3. Dane są dwie różne cyfry, z których żadna nie jest zerem. Wykaż, że suma wszystkich liczb dwucyfrowych, które można zapisać przy pomocy tych cyfr, jest podzielna przez 22.

4. Znajdź wszystkie naturalne liczby n takie, że $n + 19$ oraz $n + 98$ są kwadratami.

5. Na olimpiadzie dziesięcioro uczniów rozwiązało w sumie 35 zadań. Wśród nich jest uczeń, który rozwiązał dokładnie 1 zadanie, taki, który rozwiązał dokładnie 2 zadania, oraz uczeń, który rozwiązał dokładnie 3 zadania. Udowodnij, że istnieje uczeń, który rozwiązał co najmniej 5 zadań.

6. W pewnym kraju są cztery miasta: A, B, C i D. Z miasta A wystartowały jednocześnie dwa samoloty. Trasa pierwszego to ABDCB, a drugiego to ACDBCB. Który samolot szybciej zakończy swoją trasę, jeśli między miastami latają w linii prostej, a ich prędkości są takie same?

Uwaga. Nie bierzemy pod uwagę czasu spędzonego przez samolot na lotnisku między lądowaniem a wylotem.

7. Luna stoi na dachu swojego domu, którego wysokość to 3 m, i patrzy na sąsiedni dom. Jego dół widzi pod kątem 60° do poziomu, a żeby spojrzeć na jego dach musi podnieść głowę o 90°. Jak wysoki jest sąsiedni dom? Wiadomo, że domy mają fundamenty na tym samym poziomie.

8. Woda może napełniać basen z dwóch kranów. Jeżeli napełniamy basen z obu kranów naraz, zajmuje to 3 h, a jeśli tylko z pierwszego kranu – 5 h. Ile zajmie napełnienie basenu, jeżeli tylko drugi kran jest odkręcony?

9. Na ile sposobów można wypłacić 240 zł, korzystając tylko z nominałów 5 zł, 2 zł i 1 zł?

10. Zegar (wskazówkowy, dwunastogodzinny) wskazuje godzinę 8:00. Za ile minut wskazówka minutowa dogoni godzinową?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2024/25

Rozwiązania zadań (klasy 7-8 SP)

1. Otóż nie można. Rozważmy dowolny trójkąt różnoboczny $\triangle ABC$ oraz bez straty ogólności niech odcinek dzielący go na dwa trójkąty będzie wychodził z wierzchołka C i opadał na bok AB w punkcie M. Załóżmy nie wprost, że $\triangle AMC \equiv \triangle MBC$. Rozważmy wówczas dwa przypadki:

(a) $|AM| = |MB|$ i $|AC| = |CB|$, sprzeczne z założeniem, że trójkąt $\triangle ABC$ jest różnoboczny.

(b) $|AM| = |BC|$ i $|AB| - |AM| = |AC|$. Stąd $|AB| - |BC| = |AC|$, sprzeczne z warunkiem istnienia trójkąta.

2. Przypuśćmy, że ułamek $\frac{m+n}{n}$ jest skracalny, wówczas liczby $m+n$ oraz n mają wspólny dzielnik $p > 1$. p dzieli $m+n$ oznacza, że albo żadna z nich nie dzieli się, a reszty z dzielenia m przez p i n przez p sumują się do p, albo obie liczby dzielą się przez p. W obliczu zaś faktu, że p dzieli n, wnioskujemy że m i n mają wspólny dzielnik p. Przeczy to jednak temu, że ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny.

3. Niech a i b to będą te cyfry. Suma wszystkich liczb, które można przy ich użyciu zapisać to:

$$(10a + a) + (10a + b) + (10b + a) + (10b + b) = 22(a + b)$$

skąd wynika podzielność przez 22.

4. Oznaczmy $n + 19 = a^2$, $n + 98 = b^2$. Wtedy $(b - a)(b + a) = b^2 - a^2 = 79$. Liczba 79 jest pierwsza, zatem $b - a = 1$ oraz $b + a = 79$. Z tego wynika, że jedyne takie n to 1502. Łatwo sprawdzić (ale jest to konieczne w rozwiązaniu!), że ta liczba faktycznie ma żądaną własność.

Uwaga do punktacji. Alternatywne rozwiązanie może polegać na zapisaniu kwadratów jako a^2 i $(a + d)^2$. Wtedy różnica da nam

$$79 = 2ad + d^2 = d(2a + d),$$

skąd możemy wynioskować, że $d \mid 79$ oraz $d < 9$. Jeśli zostanie stąd wywnioskowane, że $d = 1$, to jest to rozwiązanie na pełną liczbę punktów. Jeśli natomiast będą sprawdzane możliwe wartości d, to należy odjąć 3 pkty. Jeśli przypadków jest więcej niż 10, należy odjąć 4 pkty.

5. Co najmniej jeden uczeń rozwiązał 1 zadanie, co najmniej jeden 2 zadania i co najmniej jeden 3 zadania. Tych troje uczniów łącznie rozwiązało 6 zadań. Zatem pozostałych siedmioro uczniów musiało rozwiązać łącznie 29 zadań. Z zasady szufladkowej musi być jeden, który rozwiązał co najmniej 5. Uzasadnienie, że gdyby każdy z siedmiorga rozwiązał mniej niż 5 zadań, łącznie rozwiązanych byłoby najwyżej 28, też jest poprawne.

6. To, który samolot szybciej zakończy swoją trasę, zależy wyłącznie od jej długości. Trasa pierwszego samolotu ma długość: $|AB| + |BD| + |DC| + |CB|$, a trasa drugiego: $|AC| + |CD| + |DB| + |BC| + |CB|$. Z nierówności trójkąta wynika, że $|AB| < |AC| + |CB|$. Zatem $|AB| + |BD| + |DC| + |CB| = |AB| + |CD| + |DB| + |BC| < |AC| + |CD| + |DB| + |BC| + |CB|$. Stąd pierwszy samolot zakończy swoją trasę szybciej.

7. Kąt od poziomu Luny do dachu sąsiedniego budynku to $30°$. Obliczamy z trójkąta $30 - 60 - 90$, że odległość w poziomie do sąsiedniego budynku to $\sqrt{3}$ m, więc odległość w pionie od poziomu Luny do dachu sąsiedniego budynku to 1 m. Łączna wysokość sąsiedniego domu to zatem 4 m.

8. Oznaczmy czas (w godzinach) potrzebny na napełnienie całego basenu przez t. Wtedy w ciągu jednej godziny z drugiego kranu napełnimy

$$\frac{1}{t}$$

basenu, a tylko z pierwszego kranu

$$\frac{1}{5}$$

basenu. Zatem, skoro odkręcając oba krany uzyskamy szybkość napełniania $\frac{1}{3}$, mamy równanie

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3},$$

którego rozwiązaniem jest $t = 7.5\,\mathrm{h}$.

9. Zapomnijmy na chwilę o nominale 5 zł. Zarówno kwotę $2k$, jak i $2k+1$ możemy za pomocą pozostałych nominałów wydać na $k+1$ sposobów w zależności od liczby użytych dwuzłotówek, od 0 do k.

Jeśli skorzystamy z parzyście wielu pięciozłotówek pozostanie nam do wydania któraś z kwot

$$240, 230, \ldots, 20, 10, 0,$$

co możemy zrobić na odpowiednio

$$121, 116, 111, \ldots, 11, 6, 1$$

sposobów. Jeżeli natomiast użyjemy nieparzyście wielu pięciozłotówek, pozostała kwota to

$$235, 225, 215, \ldots, 25, 15, 5.$$

Możemy wydać ją na

$$118, 113, 108, \ldots, 13, 8, 3$$

sposoby. Sumując po wszystkich możliwościach dostajemy

$$\begin{aligned}(121 + 116 + \ldots + 6 + 1) + (118 + 113 + \ldots + 8 + 3) &= \\ 25 \cdot 1 + 5(24 + 23 + \ldots + 1 + 0) + 24 \cdot 3 + 5(23 + 22 + \ldots + 1 + 0) &= \\ 2977.\end{aligned}$$

W rachunku skorzystaliśmy z faktu, że liczby w pierwszej sumie to kolejne liczby postaci $5k+1$, liczby w drugiej sumie są postaci $5k+3$, oraz ze wzoru

$$0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

10. Niech t będzie czasem, który upłynie. Wtedy pozycje kątowe odpowiednich wskazówek spełniają równanie (w stopniach)

$$240 + t \cdot \frac{360}{12 \cdot 60} = 6t,$$

co daje

$$t = \frac{480}{11}.$$

Warto zauważyć, że jest to mniej niż 60 min, więc równanie faktycznie ma sens (tzn. spotkanie nastąpi, zanim wskazówka minutowa przebiegnie całą tarczę).