Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 3 (licea, runda eliminacyjna)

1. Pokaż, że dla każdego n naturalnego liczba $2^{n+3} + 2^n$ jest podzielna przez 9.

2. Dany jest okrąg ω i punkt P poza okręgiem. Z punktu P poprowadzono dwie proste k i ℓ takie, że k jest styczna do ω w punkcie A, a ℓ przecina ω w punktach B i C (B bliżej P). Wiadomo, że odcinek PA jest dwukrotnie dłuższy od PB i dwukrotnie dłuższy od PC skróconego o 7. Podaj długość odcinka PA.

3. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi podzielność $4|n^4 + 12n^3 + 27n^2$.

4. Rozwiąż równanie

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}.$$

5. Jacek i Placek grają w następującą grę na szachownicy $n \times n$. Kolejno wykonują ruch polegający na umieszczeniu skoczka na wybranym przez siebie polu, które nie jest atakowane przez żadnego innego skoczka (nie ma znaczenia, który gracz postawił skoczka atakującego dane pole). Gracz przegrywa, jeśli nie będzie mógł postawić skoczka na żadnym polu.
Jacek wykonuje ruch jako pierwszy. Który z graczy, w zależności od wymiaru planszy, ma strategię wygrywającą?

6. Dany czworokąt wypukły przekształcić (za pomocą cyrkla i linijki) na trójkąt o takim samym polu.

7. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie:

$$\left(x^3 - 10x^2 + 24x - 8\right)^4 - 51\left(x^3 - 10x^2 + 24x - 8\right)^2 - 832 = 0.$$

8. Dana jest funkcja f_0 zdefiniowana następującym wzorem:

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in (0,1] \\ 0, & \text{gdy } x \notin (0,1] \end{cases}$$

Oraz ciąg funkcji f_n zdefiniowany rekurencyjnie:

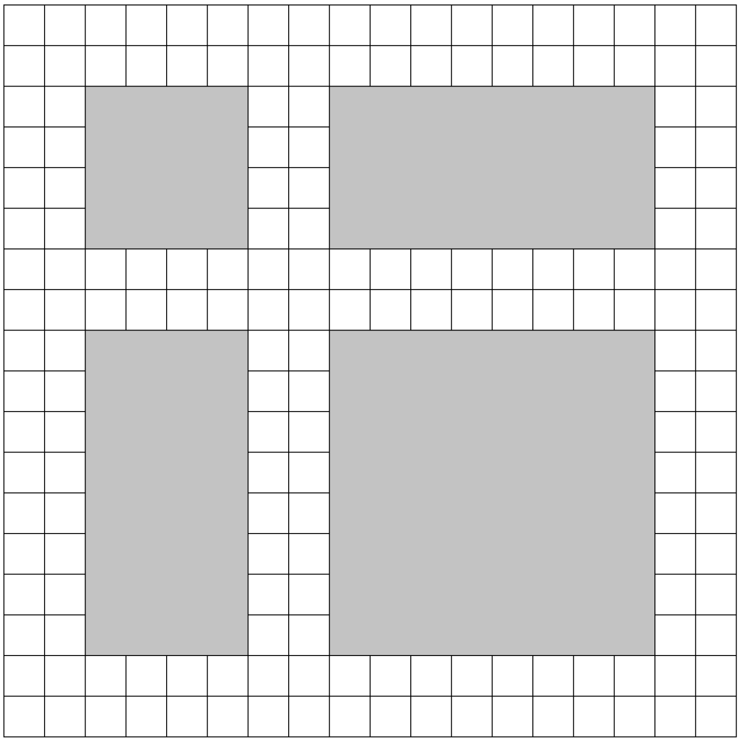
$$f_n(x) = \frac{1}{2} f_{n-1}(2x) + f_{n-1}(2x-1)$$

Oblicz $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

9. Na płaszczyźnie dana jest prosta m oraz punkty A i B leżące po przeciwnych stronach prostej m. Znaleźć na prostej m taki punkt M, żeby różnica odległości tego punktu od punktów A i B była jak największa.

Prosimy nie udostępniać nikomu zadań przed oficjalną ich publikacją na stronie konkursu.

10. W Ogrodzie Botanicznym w Grafii Abstrakckiej planowany jest remont chodnika dookoła czterech niewielkich skwerów z *drzewami binarnymi.* Do budowy chodnika zamówiono płyty o wymiarach $0,5m \times 1,5m$. Czy można tak ułożyć chodnik z płyt, aby nie trzeba było ciąć płyt i żadne dwie płyty się nie nachodziły? Schemat chodnika do wyremontowania znajduje się na obrazku poniżej, przy czym małe kwadraty na rysunku mają wymiary $0,5m \times 0,5m$.



Prosimy nie udostępniać nikomu zadań przed oficjalną ich publikacją na stronie konkursu.

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 3 – rozwiązania (licea, runda eliminacyjna)

1. Z wyrażenia $2^{n+3} + 2^n$ wyłączmy 2^n przed nawias. Dostajemy:

$$2^{n+3} + 2^n = (2^3 + 1)2^n = 9 \cdot 2^n,$$

co oczywiście jest liczbą podzielną przez 9.

2. Niech $|PA| = x$. Warunki zadania mówią, że wówczas $|PB| = \frac{x}{2}$ oraz $|PC| = \frac{x+14}{2}$.
Z twierdzenia o stycznej i siecznej mamy równość

$$x^2 = \frac{x}{2} \cdot \frac{x+14}{2},$$

która prowadzi do równania kwadratowego

$$3x^2 - 14x = 0,$$

a stąd jedynym dodatnim rozwiązaniem jest $x = \frac{14}{3}$ i wówczas $|PA| = \frac{14}{3}, |PB| = \frac{7}{3}, |PC| = \frac{28}{3}$.

3. $n^4 + 12n^3 + 27n^2 = (n+3)(n+9)n^2 = n^2(n-1)(n+9) + 4n^2(n+9) = n^2(n-1)(n+1) + 8n^2(n-1) + 4n^2(n+9)$
Zauważmy, że $4|4n^2(n+9) = n^2(n-1)(n+1) + 8n^2(n-1) + 4n^2(n+9)$, zatem wystarczy sprawdzić, że $4|n^2(n-1)(n+1)$.
Jeśli $2|n$, to $4|n^2$, zatem $4|n^2(n-1)(n+1)$. W przeciwnym przypadku reszta z dzielenia n przez 4, to 3 lub 1, zatem $4|n-1$ lub $4|n+1$. Wtedy $4|n^2(n-1)(n+1)$, co kończy dowód.

4. Dziedziną równania jest $D = \mathbb{R} \setminus \{x : x = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$-2\sin\left(\frac{3}{4}x\right)\sin\left(\frac{1}{4}x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{3}{4}x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{1}{4} - \frac{\pi}{3} = m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

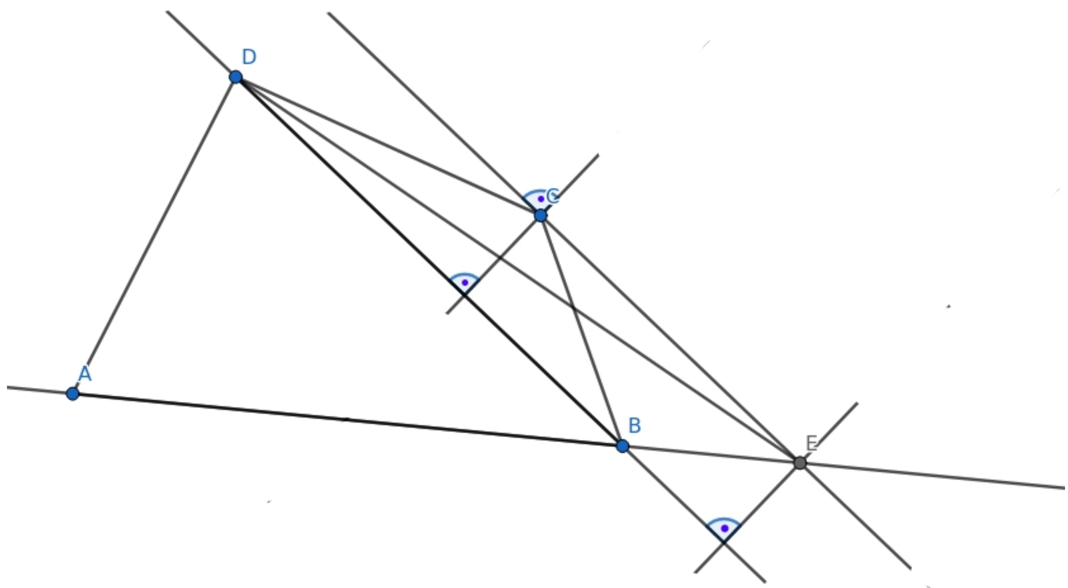
$$x = \frac{4}{3}k\pi \vee x = (4m+1)\pi + \frac{\pi}{3} \notin D$$

Rozważając reszty z dzielenie k przez 3 otrzymujemy, że zbiorem rozwiązań równania jest $\{x : x = 4k\pi \vee x = 4k\pi - \frac{4}{3}\pi\}$

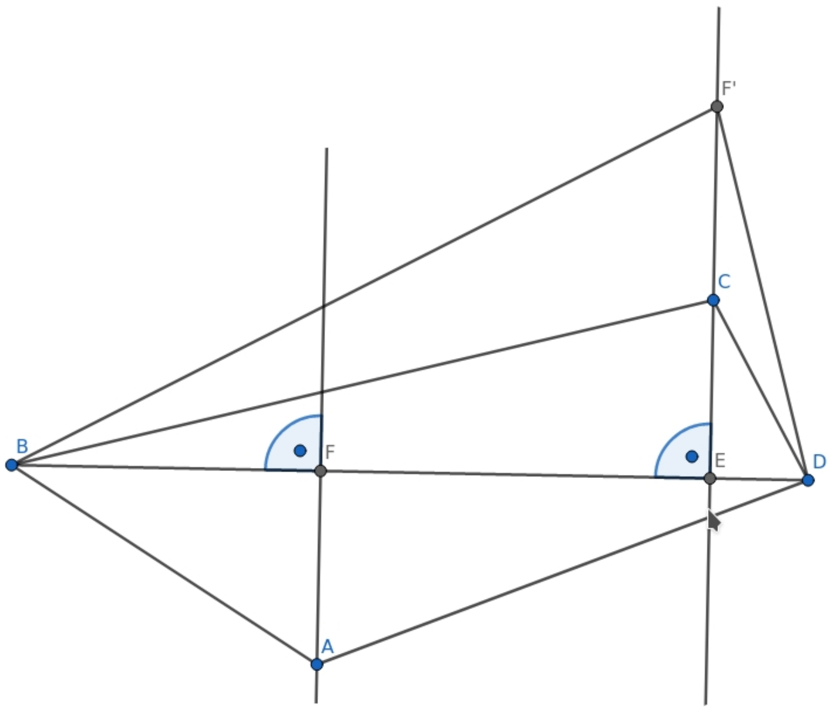
5. Rozważmy przypadek, gdy n jest parzyste. Niech pole (i, j) oznacza pole szachownicy znajdujące się w i-tym wierszu i j-tej kolumnie. Zauważmy, że jeśli Jacek dostawi skoczka na polu (i, j), to Placek zawsze może postawić skoczka na polu $(n - i + 1, n - j + 1)$, to jest środkowo symetrycznie do pola, na którym skoczka postawił Jacek. Rozwiązując odpowiedni układ równań na współrzędnych, lub zauważając, że skoczki dostawione w kolejnych ruchach przez Jacka i Placka leżą po przeciwnych stronach pewnej diagonali, można pokazać, że skoczek dostawiony przez Jacka na polu (i, j) nie atakuje pola $(n - i + 1, n - j + 1)$. Zauważmy, że żaden inny skoczek też nie atakuje tego pola: w przeciwnym razie inny skoczek atakowałby pole, na którym skoczka kładzie Jacek, ze względu na to, że Placek dokłada swoje skoczki środkowo symetrycznie. Zatem Placek ma strategię wygrywającą.

W przypadku, gdy n jest nieparzyste, Jacek ma strategię wygrywającą. Polega ona na położeniu skoczka na środku szachownicy (rozkład pól atakowanych przez niego jest środkowo symetryczny względem środka szachownicy). W następnych ruchach Jacek układa skoczki środkowo symetrycznie do skoczków Placka. Argumentacja z poprzedniego przypadku pokazuje, że zawsze może wykonać taki ruch.

6. Sposób I: Oznaczmy punkty czworokąta jako A, B, C, D. Niech k będzie prostą zawierającą podstawę AB. Skonstruujmy prostą l równoległą do przekątnej DB i przechodzącą przez punkt C. Oznaczmy punkt przecięcia prostych k i l jako E. Pokażemy, że trójkąt DBC ma pole równe polu trójkąta DBE. Zauważym, że oba trójkąty mają wspólną podstawę DB. Ponadto wysokość trójkąta opuszczona na podstawę jest równa odległości prostej zawierającej tę podstawę od punktu trójkąta który do tej podstawy nie należy. Skoro C i E leżą na prostej l równoległej do odcinka DB, to ich odległość od prostej zawierającej DB jest równa, zatem wysokość DBC opuszczona na bok DB jest równa wysokości DBE opuszczonej na bok DB. Skoro oba trójkąty mają równe odpowiednie podstawy i wysokości, to ich pola są równe. Z tego wynika, że $P_{ADE} = P_{ADB} + P_{DBE} = P_{ADB} + P_{DBC} = P_{ABCD}$, co należało pokazać.



Sposób II: Oznaczmy punkty czworokąta jako A, B, C, D. Niech k będzie prostą zawierającą przekątną DB. Możemy skonstruować prostopadłe do k proste l, m, przechodzące odpowiednio przez punkty C i A oraz przecinające k odpowiednio w punktach E i F. CE jest wysokością trójkąta DBC opuszczoną na DB a AF - wysokością trójkąta ABD opuszczoną na DB. Odłóżmy na prostej l odcinek $A'F'$ długości odcinka AF tak, żeby $A' = C$ i $|EC| + |CF'| = |EF'|$. Wówczas $P_{BDF'} = \frac{1}{2}|BD||EF'| = \frac{1}{2}|BD|(|EC| + |CF'|) = \frac{1}{2}|BD||EC| + \frac{1}{2}|BD||A'F'| = \frac{1}{2}|BD||EC| + \frac{1}{2}|BD||AF| = P_{DBC} + P_{DBA} = P_{ABCD}$, co należało pokazać.



7. Zastosujemy 2 podstawienia. Najpierw podstawmy $t = \left(x^3 - 5x^2 + 6x - 1\right)$. W wyniku tego podstawienia równanie sprowadza się do

$$t^4 + 51t^2 - 832 = 0.$$

Następnie ponownie podstawmy $u = t^2$, aby otrzymać

$$u^2 + 51u - 832 = 0.$$

Rozwiązując tak otrzymane równanie kwadratowe dostajemy

$$u = -13 \qquad \text{lub} \qquad u = 64.$$

Dla $u = -13$ równanie $t^2 = u$ nie ma rozwiązań, natomiast dla $u = 64$ dostajemy dwa rozwiązania $t = 8$ oraz $t = -8$. Mamy zatem 2 przypadki:

$$x^3 - 10x^2 + 24x - 8 = 8 \qquad\qquad x^3 - 10x^2 + 24x - 8 = -8$$

$$x^3 - 10x^2 + 24x - 16 = 0 \qquad\qquad x^3 - 10x^2 + 24x = 0$$

$$x^3 - 10x^2 + 24x - 16 = 0 \qquad\qquad x(x^2 - 10x + 24) = 0$$

W pierwszym przypadku jesteśmy w stanie z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu zgadnąć rozwiązanie $x = 2$, a więc stąd dostajemy

$$(x-2)(x^2 - 8x + 8) = 0 \qquad\qquad x(x^2 - 10x + 24) = 0$$

Zakładając, że $x \neq 2$ i $x \neq 0$ można podzielić równania odpowiednio przez $(x - 2)$ i x, aby dostać

$$x^2 - 8x + 8 = 0 \qquad\qquad x^2 - 10x + 24 = 0$$

Z pierwszego z tych równań dostajemy rozwiązania $x = 4 - 2\sqrt{2}$ i $x = 4 + 2\sqrt{2}$, z drugiego natomiast dostajemy $x = 4$ i $x = 6$.

8. Pokażemy najpierw, że $f_n(x) = 0$ dla każdego n i każdego $x \notin (0,1]$. Indukcyjnie: dla $n = 0$ wynika to z definicji z f_0. Załóżmy, że $f_n(x) = 0$ dla każdego $x \notin (0,1]$. Weźmy x spoza $(0,1]$ przedziału. Wówczas $2x$, $2x-1$ również nie należą do tego przedziału, zatem $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}f_{n-1}(2x) + f_{n-1}(2x-1) = 0 + 0 = 0$, czyli teza zachodzi.

Teraz weźmy x należący do $(0,1]$. Tylko jedna z liczb $2x, 2x-1$ należy do tego przedziału. Stwórzmy ciąg x_n w następujący sposób:

$$x_0 = x,\ x_n \begin{cases} 2x_{n-1}, & \text{gdy } x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2x_{n-1} - 1, & \text{gdy } x \notin (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Wówczas $f_n(x_0) = (\frac{1}{2})^k f_{n-1}(x_1)$ gdzie $k = 0$ gdy $x < \frac{1}{2}$ i $k = 1$ w przeciwnym przypadku. Indukcyjnie $f_n(x_0) = (\frac{1}{2})^k f_{n-i}(x_i)$ dla pewnego całkowitego $k \leqslant n - i$, Zatem $f_n(x_0) = (\frac{1}{2})^{k_n} f_0(x_n) = (\frac{1}{2})^{k_n}$ dla pewnego całkowitego $k_n \leqslant n$. Aby obliczyć $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ wystarczy więc zbadać $\lim_{n\to\infty} k_n$. Zauważmy, że k_n odpowiada liczbie wyrazów ciągu x o indeksach z przedziału $(0, n]$, których wartość mieści się w przedziale $(\frac{1}{2}, 1]$. Ponieważ jednak dla każdego $x_i \leqslant \frac{1}{2}$ następne wyrazy ciągu zwiększają się dwukrotnie aż będą większe od $\frac{1}{2}$, to w ciągu istnieje nieskończenie wiele wyrazów większych od $\frac{1}{2}$. Wynika z tego, że $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$. Podsumowując: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dla każdego x, co kończy rozwiązanie zadania.

9. Niech B' będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej m (rys. 18). Jeżeli punkt P jest dowolnym punktem prostej m, to

$$|AP - BP| = |AP - B'P| \leq AB'$$

Różnica $|AP - BP|$ osiąga zatem swą największą wartość, równą długości odcinka AB', gdy $|AP - B'P| = AB$, tzn. gdy punkty A, B', P leżą na jednej prostej. Jeśli prosta AB' nie jest równoległa do prostej m, to szukany punkt M jest punktem przecięcia prostych AB' i m. Prosta m jest wówczas dwusieczną kąta AMB. Jeśli proste AB' i m są równoległe, tzn. jeśli punkty A i B są równo odlegle od prostej m, wówczas zadanie nie ma rozwiązania.

Dowiedzione twierdzenie pozwala w prosty sposób uzasadnić ważną własność hiperboli. Niech A_1 i A_2 będą wierzchołkami, a F_1 i F_2 - ogniskami hiperboli (rys. 19). Hiperbola dzieli płaszczyznę na trzy obszary, które oznaczymy I, II, III, jak na rys. 19.

Wiadomo, że jeżeli punkt P leży na hiperboli, to $|F_1P + F_2P| = A_1A_2$, jeżeli P znajduje się w obszarze I, to $|F_1P - F_2P| < A_1A_2$, jeśli zaś P leży w jednym z obszarów II lub III, to $|F_1P + F_2P| > A_1A_2$.

Niech m będzie prostą styczną do hiperboli w punkcie M, a P - dowolnym punktem prostej m. Prosta m leży (poza punktem M) w obszarze I zatem różnica $|F_1P - F_2P|$ jest dla każdego punktu P różnego od M mniejsza niż A_1A_2, a w punkcie M osiąga swą największą wartość równą długości A_1A_2. Z dowiedzionego poprzednio twierdzenia wynika, że prosta m jest dwusieczną kąta F_1MF_2, tzn. zachodzi twierdzenie:

Styczna do hiperboli jest dwusieczną kąta utworzonego przez odcinki łączące punkt styczności z ogniskami hiperboli.

10. Policzmy ile płyt jest potrzebne, aby teoretycznie móc wyremontować cały chodnik. Cały obszar na obrazku ma wymiary $9m \times 9m$, natomiast skwery zajmują łącznie pole $36m^2$. Zatem, ponieważ każda z płyt zajmuje $0,75m^2$, to do wyremontowania chodnika będzie potrzebne 60 płyt. Pokolorujmy szachownicę jak pokazano na rysunku poniżej. Zauważmy, że każda z płyt musi leżeć na dokładnie jednym szarym polu. Szarych pól jest jednak 58, zatem na chodniku da się umieścić w całości co najwyżej 58 płyt.
Odpowiedź: Nie jest to możliwe.