Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 3 (SP 4-6, runda eliminacyjna)

1. Po podzieleniu 90 i 100 przez pewną liczbę otrzymujemy reszty odpowiednio 18 i 4. Przez jaką liczbę dzielono?

2. Mama położyła na stole jabłka i poprosiła swoje dzieci, aby każde wzięło jedną trzecią jabłek znajdujących się na stole. Dzieci po kolei podeszły do stołu i wykonały polecenie mamy. Ile jabłek mama zostawiła na stole, skoro trzecie dziecko wzięło cztery jabłka?

3. W szkole jest 20 klas, a w nich 610 uczniów. Ilu co najmniej uczniów liczy najliczniejsza klasa?

4. Wiadomo, że liczby naturalne dodatnie A i B spełniają równość:

$$7 \cdot A = 13 \cdot B$$

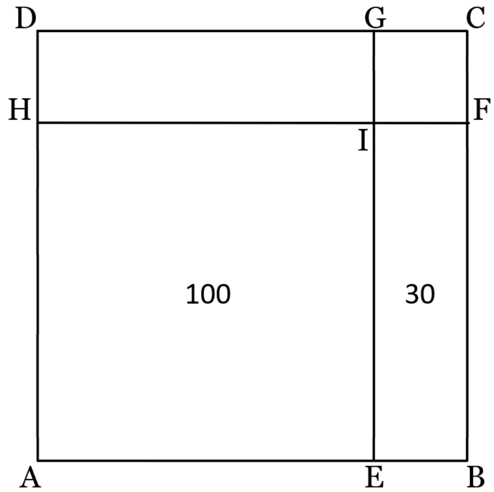
Czy liczba $A + B$ jest złożona?

5. Dany jest ciąg liczb:

$$10, 8, 11, 9, 12, 10, 13...$$

Oblicz 101. wyraz tego ciągu.

6. Wyznacz długość boku kwadratu $ABCD$, jeżeli wiemy, że pole kwadratu $AEIH$ wynosi 100, a pole prostokąta $EBFI$ jest równe 30.



7. Droga Ani z domu do szkoły ma pięć kilometrów i biegnie przez górkę. Ania pokonuje ją rowerem z prędkością $10\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, drogę powrotną zaś z prędkością $30\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Jaka jest średnia prędkość Ani na trasie dom-szkoła-dom?

8. Aneta, Basia, Cyryl i Damian chcą się przeprawić przez Rzekę Boleści. Na brzegu widzą łódkę, w której niestety są dostępne tylko dwa miejsca. Dodatkowo Aneta jako jedyna potrafi sterować łódką. Wiemy, że Basia nie odzywa się do Cyryla, a Cyryl do Damiana, więc pozostawienie ich samych na brzegu jest niemożliwe. W jaki sposób mogą przeprawić się przez rzekę bez uszczerbku na zdrowiu?

9. Jaka liczba spełnia równanie

$$\frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{x} \ ?$$

10. Jaka jest cyfra milionów w liczbie, która jest iloczynem kolejnych liczb naturalnych od 1 do 2022?

Prosimy nie udostępniać nikomu zadań przed oficjalną ich publikacją na stronie konkursu.

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 3 - rozwiązania (SP 4-6, runda eliminacyjna)

1. Niech k będzie liczbą, przez którą dzielono. Możemy zapisać $100{=}k\cdot m{+}4, 90 = k\cdot n{+}18$, czyli $k\cdot m = 96, k\cdot n = 72$. Wspólnym dzielnikiem 72 i 96 większym niż 18 jest 24.

2. Jabłek było 27. Zacznijmy od końca.
Ostatni wziął 4, co jest trzecią częścią tego, co zostawił drugi. Stąd trzeci zobaczył 12 jabłek na stole.
(*Jeżeli uczeń doszedł do tego momentu i dalej albo nie rozwiązał, albo popełnił znaczące błędy uniemożliwiające rozwiązanie zadania, otrzymuje za zadanie 3 pkt.*
Ponieważ drugi zostawił 12 jabłek, więc wszystkich jabłek w momencie jego przyjścia było $12 \cdot \frac{3}{2} = 18$. Stąd on wziął 6 jabłek.
(*Jeżeli uczeń zapisał, ile jabłek było w chwili, gdy do stołu podeszło drugie dziecko i dalej albo nie rozwiązał, albo popełnił znaczące błędy uniemożliwiające rozwiązanie zadania, otrzymuje za zadanie 7 pkt.*)
Wreszcie, jeżeli drugie dziecko zobaczyło 18 jabłek, to oznacza, że tyle jabłek zostawiło pierwsze dziecko. Zatem dziecko to, przed wzięciem swojej części jabłek, widziało na stole $18 \cdot \frac{3}{2} = 27$ jabłek.
(*Za kompletne rozumowanie uczeń otrzymuje 10 pkt. Za poprawne rozpatrzenie tylko ostatniego i drugiego dziecka uczeń otrzymuje 7 pkt. Za poprawne rozpatrzenie tylko ostatniego dziecka uczeń otrzymuje 4 pkt.*)

3. Gdyby w każdej klasie było co najwyżej 30 uczniów to w całej szkole byłoby ich tylko 600, z kolei nie jest możliwym, by w każdej klasie było po 31 uczniów, więc w najliczniejszej klasie (klasach) musi być co najmniej 31 uczniów.

4. Z podanej równości wynika:

$$13(A + B) = 13 \cdot A + 13 \cdot B = 13 \cdot A + 7 \cdot A = 20 \cdot A$$

Czyli $A + B$ jest liczbą złożoną. *Za ułożenie równania, które doprowadzi do rozwiązania, dajemy 7 punktów; za błąd przy przekształcaniu zabieramy 2 punkty.*

5. Będzie to liczba 60. Ciąg rozdzielamy na dwa podciągi – jeden utworzony z wyrazów na miejscach parzystych, drugi powstały z wyrazów z miejsc nieparzystych. Rozpatrujemy drugi z nich, oznaczmy go a_n. Wiemy, że 101. wyrazem wyjściowego ciągu będzie a_{51} (bo $\lceil \frac{101}{2} \rceil = 51$). Stąd na n-tym miejscu mamy liczbę postaci $n + 9$, czyli $a_{51} = 51 + 9 = 60$.

6. Skoro pole kwadratu $AEIH$ wynosi 100, to jego bok ma 10 ($|AE| = |EI| = 10$). Stąd korzystając z pola prostokąta $EBFI$ otrzymujemy, że odcinek $|EB| = \frac{30}{10} = 3$. Zatem długość boku $|AB| = 10 + 3 = 13$.
(brak rozwiązania/błędne rozumowanie - 0 pkt.; wyznaczenie długości boku kwadratu AEIH - 4 pkt.; wyznaczenie długości |EB| - 2 pkt.; wyznaczenie długości boku całego kwadratu - 4 pkt.)

7. Droga do szkoły zajmuje jej 30 minut, a droga powrotna zajmuje 10 minut. Zatem w sumie pokonuje ona 10 km w 40 minut, czyli 15 km w godzinę. *Za odpowiedź 20 km/h nie przyznajemy punktów.*

8. W każdym momencie Aneta musi pozostawać w łódce. Płynąć można w następujący sposób: przeprawiamy Cyryla, wracamy, płyniemy z Basią, wracamy z Cyrylem; zostawiamy Cyryla, zabieramy Damiana, wracamy bez pasażera po Cyryla.

9.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{x}\\
\frac{1}{x} &= \frac{36-3-4}{12}\\
\frac{1}{x} &= \frac{29}{12}\\
12 &= 29x\\
x &= \frac{12}{29}
\end{aligned}
$$

Za poprawne rozwiązanie bez błędów obliczeniowych dajemy 10 punktów, za każdy błąd obliczeniowy odejmujemy 2 punkty, ale nie schodzimy poniżej 0.

10. 0. Zauważmy, że „po drodze" mnożymy przez 1000 i 2000.