Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2023/24

Eliminacje (klasy 4-6 SP)

1. Krysia odkryła następującą zabawę: wybiera sobie liczbę trzycyfrową, po czym dodaje do niej sumę jej cyfr. Zauważyła, że czasami wychodzi jej liczba parzysta, a czasami nieparzysta. Jeśli powtórzy to dla wszystkich liczb trzycyfrowych (od 100 do 999), ile razy otrzyma parzysty wynik?

2. Cztery dziewczynki i sześciu chłopców siedzą w rzędzie na tym samym pniu zwalonego dębu. Wszystkie dziewczynki siedzą obok siebie, tzn. między dwiema dziewczynkami siedzieć może tylko inna dziewczynka. Tak samo wszyscy chłopcy siedzą obok siebie. Ile jest możliwych sposobów posadzenia dzieci?

3. To stole leży 399 monet, z czego 199 orłem do góry, a 200 – reszką do góry. Jaś w jednym ruchu może wybrać i odwrócić dokładnie trzy monety. Ile musi co najmniej wykonać ruchów, aby wszystkie monety leżały reszką do góry?

4. Ile zer na końcu ma liczba

$$5^{2027} - 5^{2024}?$$

5. W klasie jest 13 chłopców i 17 dziewczynek. Na ile sposobów mogą spośród siebie wybrać trzyosobową delegację tak, by nie było w niej trzech osób tej samej płci?

6. Dany jest trójkąt ABC. Punkty D i E są wybrane na bokach AB i AC w taki sposób, że proste DE i BC są równoległe. Punkty D,E,F leżą na prostej w tej kolejności. Znane są wartości kątów

$$\sphericalangle BAC = 30^\circ, \sphericalangle FEA = 45^\circ.$$

Ile wynosi miara kąta $\sphericalangle BDF$?

7. Wiadomo, że liczba 701 to 126. liczba pierwsza. Jaka jest 125. liczba pierwsza?

8. Oblicz wartość wyrażenia

$$\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{\ldots\sqrt{10\sqrt{100}}}}}},$$

gdzie symbol pierwiastka występuje 2024 razy.

9. Basenik ma kształt sześcianu o bokach długości 50 centymetrów. Woda wpływa do niego w tempie 2,1 litrów na minutę, a wypływa w tempie 5/3 mililitra na sekundę. Po jakim czasie basenik się zapełni?

10. Amanda, czytając dziennik swojej babci, zauważyła że w pewnym roku zdarzył się miesiąc, którego pierwszy i ostatni dzień były poniedziałkami. Kiedy będzie najbliższy taki rok?

Uwaga. Dzisiaj jest wtorek, 5. marca.

1. Mamy dwa przypadki: albo liczba jest nieparzysta i wtedy suma też jest nieparzysta, albo obie są parzyste. W pierwszym przypadku wybieramy najpierw ostatnią cyfrę na 5 sposobów, potem pierwszą na 9. Na środkową cyfrę mamy dokładnie 5 możliwości tak, by suma była cyfr była nieparzysta. To daje

$$5 \cdot 9 \cdot 5 = 225$$

możliwości. Drugi przypadek jest analogiczny, więc ostateczny wynik to

$$450.$$

2. Możemy ustawić dziewczynki w kolejności na $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów, a chłopców – na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów. Ponieważ możemy jeszcze wybrać, kto jest z lewej, a kto z prawej strony kłody, musimy pomnożyć liczbę wyborów przez 2, co daje łącznie

$$2 \cdot 4! \cdot 6! = 34560.$$

Ocenianie. Za brak pomnożenia przez 2 odejmujemy 3 punkty.

3. Zauważmy, że ruchy, które możemy wykonać, powodują albo wzrost liczby reszek o 3, albo o 1, albo zmniejszenie o 1 lub 3. Potrzebne jest zatem przynajmniej 67 ruchów, bo przy 66 odwrócimy najwyżej 168 monet. Faktycznie da się tyle osiągnąć – najpierw wykonujemy ruch zmniejszający o 1, a potem 66 ruchów zmniejszających o 3.

Ocenianie. Za rozwiązanie bez uzasadnienia, że jest optymalne nie przynajemy więcej niż 5 punktów.

4. Przepisujemy liczbę jako

$$5^{2024}(5^3 - 1) = 5^{2024} \cdot 2^2 \cdot 31.$$

Ponieważ liczba zer na końcu zależy od liczby dwójek i piątek w rozkładzie, to zera na końcu będą dwa.

5. Albo wybieramy dwie dziewczynki i jednego chłopca albo na odwrót. W pierwszym z tych przypadków mamy

$$\frac{17 \cdot 16}{2} \cdot 13 = 1768$$

możliwości, a w drugim

$$\frac{13 \cdot 12}{2} \cdot 17 = 1326$$

możliwości, co razem daje

$$3094.$$

6. Obliczamy najpierw z własności kątów przyległych

$$\sphericalangle AED = 180^\circ - \sphericalangle FEA = 135^\circ.$$

Z sumy kątów w trójkącie ADE mamy

$$\sphericalangle ADE = 15°,$$

więc z własności kątów przyległych

$$\sphericalangle BDF = 180° - \sphericalangle ADE = 165°.$$

7. Szukamy tej liczby *od końca*. Liczba 700 jest podzielna przez 2, 699 – przez 3, 698 – znowu prez 2. 697 ma czynnik pierwszy 17. 696 jest podzielne prez 2, 695 przez 5, 694 przez 2, 693 przez 3, 692 przez 2. Liczba 691 jest pierwsza, co można sprawdzić, dzieląc z resztą przez liczby do pierwiastka z 691 (czyli do 26, po drodze jest 9 liczb pierwszych).

Ocenianie. Za podanie samej liczby 691 bez dowodu, że jest pierwsza, przynajemy najwyżej 7 punktów. Jeśli uczeń proponuje sprawdzenie podzielności przez wszystkie liczby od 1 do 691 lub usprawnia to podejście nieznacznie, postępujemy tak samo. Maksymalna liczba puktów powinna być przyznana tylko za sprawdzenie potencjalnych dzielników do pierwiastka (lub niewiele gorsze).

8. Mamy

$$\sqrt{100} = 10.$$

W drugim najbardziej wewnętrznym pierwiastku będziemy mieli

$$\sqrt{10\sqrt{100}} = \sqrt{10 \cdot 10} = \sqrt{100} = 10.$$

W takim razie, jeśli obliczymy najbardziej wewnętrzny pierwiastek to "zwienie się" on do $\sqrt{100}$. Zatem, obliczając całe wyrażenie od środka będziemy pozbywać się kolejnych pierwiastków, a wewnątrz wciąż będie $\sqrt{100}$. Schematycznie można to napisać:

$$\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{\ldots\sqrt{10\sqrt{100}}}}}} = \sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{\ldots\sqrt{10 \cdot 10}}}}} = \sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{\ldots 10\sqrt{100}}}}},$$

czyli wyrażenie takiej samej postaci, ale z jednym symbolem pierwiastka mniej. Zatem, gdy skończymy obliczenia, otrzymamy

$$\sqrt{100} = 10.$$

9. Tempo zmiany wody w baseniku wynosi

$$2\,\mathrm{l/min},$$

więc będzie potrzeba

$$\frac{125}{2}\mathrm{min}$$

by napełnic basen.

10. Miesiące mają $28, 29, 30, 31$ dni. Opisana sytuacja może się wydarzyć tylko, gdy miesiąc ma 29 dni, więc musi być to luty w roku przestępnym. W obecnym roku (przestępnym!) pierwszy dzień lutego to czwartek. Między jednym rokiem przestępnym a następnym (o ile nie przechodzimy przez rok podzielny przez 100!) dni tygodnia przesuwają się o

$$1 + 1 + 1 + 2 = 5$$

dni. Dni tygodnia muszą się przesunąć o 4. Zatem, by z czwartku przejść do poniedziałku, musimy przejść do 5-go najbliższego roku przestępnego, bo

$$5 \cdot 5 = 15 = 3 \cdot 7 + 4.$$

Będzie to zatem rok 2044.