Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2024/25

Eliminacje (klasy 4-6 SP)

1. Cenę książki podwyższono o 20%. W tym celu wystarczyło zmienić kolejność cyfr ceny. Ile kosztuje teraz książka, jeżeli wiadomo, że cena (i przed, i po podwyżce) jest niższa od 100 zł i wyraża się w całych złotówkach (tzn. bez groszy)?

2. W trójkącie równoramiennym ostrokątnym $\triangle ABC$ kąt $\sphericalangle ACB$ ma miarę $36°$. Na boku BC obrano punkt D taki, że odcinek AD ma długość 8cm, a miary kątów $\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle BAD$ są równe. Jaką długość ma bok AB?

3. Rozpatrujemy liczby $0, 1, 2, \ldots, 2025$. Ile wynosi suma nieparzystych pomniejszona o sumę parzystych?

4. Czy kasjer może wydać 123zł reszty trzydziestoma monetami, z których każda to złotówka, bądź pięciozłotówka?

5. Liczby $74A52B1$ oraz $326AB4C$ są podzielne przez 9. Ile wynosi C?

6. Franek wybrał się na wycieczkę górską. Policzył, że jeśli będzie szedł z prędkością 6 km/h, dojdzie do celu o 15:00. Jeśli ruszy wolniejszym tempem 5 km/h, dojdzie do celu o 15:30. O której Franek wyruszył?

7. W trójkącie ABC miara kąta przy wierzchołku A jest dwa razy mniejsza od miary kąta przy wierzchołku B i trzy razy mniejsza od miary kąta przy wierzchołku C. Z punktu C poprowadzono wysokość CD, a na odcinku AB wybrano taki punkt E, że miary kątów $\sphericalangle ACE$ i BCE są równe. Jaka jest miara kąta $\sphericalangle DCE$?

8. Prostokąt $ABCD$ ma obwód 200 m, przy czym bok AD jest krótszy niż AB. Z punktu A poprowadzono półprostą l, która dzieli kąt $\sphericalangle DAB$ na dwa kąty o równych miarach. Półprosta dzieli obwód prostokąta na dwie części, z których krótsza ma długość 80 m. Jakie są wymiary prostokąta?

9. W dniu swoich urodzin w 2025-tym roku, Ignacy ma tyle lat ile wynosi suma cyfr w roku jego narodzin. Ponadto Ignacy ma mniej niż 25 lat. W którym roku się urodził?

10. W polach tablicy 3×3 znajdują się liczby całkowite. Suma liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i w każdej przekątnej wynosi zero. Ponadto suma kwadratów liczb w górnym wierszu wynosi 2000. Ile może wynosić suma kwadratów liczb w dolnym wierszu?

1. Zauważmy, że cyfry nie mogą różnić się o więcej niż trzy. Gdyby tak było, po zamianie cyfr miejscami cena wzrosłaby o więcej niż 20 zł, a skoro ma to być 20% oryginalnej ceny mniejszej od 100 zł, nie jest to możliwe.

Jeśli cyfry różnią się o 2, to cena wzrasta o 18 zł (cyfra dziesiątek rośnie o 2, a cyfra jedności o tyle maleje). Z tego wynika, że oryginalna cena musiałaby wynosić 90 zł, ale wtedy podwyższona o 20% cena to 108 zł, co nie spełnia warunkow zadania.

Jeśli natomiast cyfry różnią się o 1, analogiczne rozważanie daje rozwiązanie 54 zł po podwyżce. Cyfry równe być nie mogą, bo wtedy po zamianie mielibyśmy taką samą liczbę.

2. Skoro trójkąt jest ostrokątny, to kąt 36° musi występować raz, w przeciwnym przypadku mielibyśmy kąt 118°. Zatem mamy: $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = 72°$. Ponieważ AD leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$, to $|\sphericalangle DAC| = 36°$, a więc trójkąt $\triangle ADB$ jest równoramienny, więc $8 = |AD| = |AB|$.

3. Rozpiszmy:

$$(1 + 3 + 5 + \cdots + 2025) - (0 + 2 + 4 + \cdots + 2024) = (1 - 0) + (3 - 2) + (5 - 4) + \cdots + (2025 - 2024)$$

Par w nawiasach jest tyle co parzystych liczb od 0 do 2024, czyli 1013, a każdy nawias daje 1, więc wynikiem jest 1013.

4. Korzystając z trzydziestu monet, na pewno wydamy przynajmniej 30 zł, bo każda moneta jest warta co najmniej 1 zł. Pozostaje do wydania 93 zł. Ale każda użyta pięciozłotówka zwiększa wydaną kwotę (ponad *bazowe* 30 zł) o 4 zł, z czego wynika, że kwota, którą dodają do wydanej reszty monety 5 zł jest podzielna przez 4. W szczególności nie da się uzyskać 93 zł.

5. Liczba jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9. Suma cyfr pierwszej liczby wynosi $19 + A + B$, zatem $A + B$ ma resztę 8 z dzielenia przez 9. Suma cyfr drugiej liczby wynosi $15 + A + B + C$, zatem C ma resztę 4 z dzielenia 9 co oznacza, że musi być równe 4.

6. Franek w drugim scenariuszu jest $\frac{5}{6}$ razy wolniejszy, więc trasa zajmie mu $\frac{6}{5}$ razy tyle czasu, co w scenariuszu pierwszym. Oznacza to, że różnica czasów (pół godziny) to $\frac{1}{5}$ czasu podróży w scenariuszu z większą prędkością. Oznacza to, że w scenariuszu z większą prędkością Franek potrzebuje

$$5 \cdot 0.5\,\mathrm{h} = 2.5\,\mathrm{h},$$

zatem wyruszył o 12:30.

7. Obliczamy, że miary kątów przy kolejnych wierzchołkach trójkąta to 30°, 60°, 90°. Ponieważ kąt przy wierzchołku B jest większy niż kąt przy wierzchołku A, na boku AB wymienione punkty leżą w kolejności A, E, D, B. Z tego obliczamy

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACE - \sphericalangle BCD = 90° - 45° - 30° = 15°.$$

8. Skoro bok AD jest krótszy, połprosta l przetnie bok CD w pewnym punkcie, który oznaczymy E. Trójkąt ADE jest prostokątny równoramienny, więc

$$|AD| = |DE|.$$

Krótsza część obwodu to

$$|AD| + |DE| = 2|AD|,$$

więc krótszy bok prostokąta ma długość 40 m. Z obwodu obliczamy, że dłuższy ma 60 m.

9. Oznaczmy rok urodzenia Ignacego jako $20AB$. Wiek w dniu urodzin wynosi $2025 - 20AB = 2025 - (2000 + 10 \cdot A + B) = 25 - 10 \cdot A - B$, natomiast suma cyfr w roku jego narodzin wynosi $2 + A + B$. Przyrównując te dwie liczby do siebie otrzymujemy $23 = 11 \cdot A + 2 \cdot B$. Liczba 23 jest nieparzysta, $2 \cdot B$ jest zawsze parzyste, zatem $11 \cdot A$ musi być nieparzyste. A może być równe 0, 1 lub 2, ale tylko $A = 1$ spełnia warunek nieparzystości. Zatem $2 \cdot B = 23 - 11 \cdot A = 12$, czyli $B = 6$. Zatem Ignacy urodził się w 2016 roku.

10. Suma wszystkich liczb w tablicy jest równa sumie jej trzech wierszy, zatem jest równa 0. Jeżeli dodamy do siebie obie przekątne, środkowy wiersz i kolumne tablicy to również otrzymamy 0. Każda liczba z tablicy poza środkową pojawi się w tej sumie jako składnik dokładnie raz, a środkowa liczba 4 razy. Z tego wynika, że trzykrotność środkowej liczby musi być równa 0, więc ona sama musi tyle wynosić. Zatem liczby leżące w naprzeciwległych rogach są do siebie przeciwne. Z tego samego powodu liczby na dole i na górze środkowej kolumny są do siebie prrzeciwne. Z tego wynkia, że dolny wiersz składa się z negacji liczb w górnym wierszu w odwrotnej kolejności. Oznacza to, że suma kwadratów liczb w dolnym wierszu jest równa sumie kwadratów liczb z górnego wiersza, czyli też wynosi 2000.