Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 3 (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. Liczbę naturalną nazywamy *pomarańczową*, gdy jest ona sumą pewnych czterech kolejnych liczb naturalnych. Ile wynosi suma wszystkich mniejszych niż 100 liczb pomarańczowych o cyfrze jedności 2?
2. Liczbę naturalną czterocyfrową nazywamy *zieloną*, jeżeli jej wszystkie cyfry są różne, żadna nie jest zerem, a jej cyfra jedności jest sumą pozostałych jej cyfr. Ile jest liczb zielonych?
3. W czworościanie foremnym o krawędziach długości 1 połączono środki krawędzi. W ten sposób wewnątrz czworościanu otrzymano sześcioscian. Ile wynosi objętość sześcioscianu?
   Przypomnijmy, że objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości a wynosi $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
4. Pole trójkąta ABC jest równe 1. Punkt D leży na półprostej AB tak, że $|AD| = 2|AB|$, punkt E leży na półprostej BC tak, że $|BE| = 2|BC|$, a punkt F leży na półprostej CA tak, że $|CF| = 2|CA|$. Ile wynosi pole trójkąta DEF?
5. Liczba 3211000 jest siedmiocyfrową liczbą autobiograficzną, ponieważ w zapisie ma 3 zera, 2 jedynki, 1 dwójkę, 1 trójkę, 0 czwórek, 0 piątek, 0 szóstek. Znajdź jedną czterocyfrową liczbę autobiograficzną. **Uwaga**: Wystarczy, że podasz liczbę i uzasadnisz, że spełnia ona warunki zadania. Nie potrzeba wyjaśniać metody jej znajdowania.
6. Dorosłe biedronki mają zawsze 4, 5 albo 6 kropek na grzbiecie. Biedronki z parzystą liczbą kropek zawsze mówią prawdę, a te z nieparzystą zawsze kłamią. Pewnego razu spotkały się 4 dorosłe biedronki. Pierwsza twierdziła, że mają w sumie 17 kropek na grzbietach, druga, że mają ich 18, trzecia - 19, a czwarta - 20. Rozstrzygnij ile kropek miała na grzbiecie każda z biedronek.
7. Czy da się wydłużyć bok dowolnego kwadratu o tyle procent, by jego pole również wzrosło o tyle samo procent? Jeśli tak, to o ile? W przeciwnym przypadku uzasadnij.
8. Jarek w ciągu dwunastu lat spotkał kontrolera biletów w autobusie dokładnie trzy razy. Pokaż, że musi się zdarzyć tak, że przez trzy kolejne lata nie spotkał żadnego kontrolera.
9. W kawiarni znajdują się wyłącznie dwa rodzaje osób: osoby całkowicie prawdomówne oraz kłamcy. Przy stoliku siedzą dwie osoby. Jedna z nich powiedziała: „moja koleżanka ze stolika twierdzi, że zawsze kłamie". Kto siedzi przy stoliku?
10. Odział piechurów jest zmuszony przeprawić się przez rzekę. Niestety zerwał się most, a woda jest zbyt zimna i głęboka, żeby przejść w bród. Szczęśliwym trafem troje malców płynie w maleńkiej łódce, w której zmieści się albo pięcioro malców, albo jeden piechur. Malcy wyrażają serdeczną chęć pomocy. Czy uda się przeprawić przez rzekę całemu oddziałowi, jeśli liczba piechurów jest parzysta? Czy byłoby to możliwe, gdyby malców było tylko dwoje?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz 3 - rozwiązania (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. Można sprawdzić po kolei warunek dla każdej z liczb $12, 22, \ldots, 92$. Można również zauważyć, że suma pewnych czterech kolejnych liczb naturalnych jest zawsze liczbą dającą resztę 2 z dzielenia przez 4, ponieważ

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 4(n + 1) + 2.$$

Z powyższego rachunku wynika również, że każda liczba dająca resztę 2 z dzielenia przez 4 i nie mniejsza niż 6 daje się przestawić w postaci takiej sumy. Stąd już łatwo wywnioskować, że szukana suma wynosi

$$22 + 42 + 62 + 82 = 208.$$

Za rozwiązanie, gdzie uczeń sprawdza warunek dla wszystkich liczb po kolei ręcznie, dajemy maksymalnie 8 punktów.

Za obserwację, że sumy czterech kolejnych liczb naturalnych są liczbami dającymi resztę 2 z dzielenia przez 4 – 4 pkt.

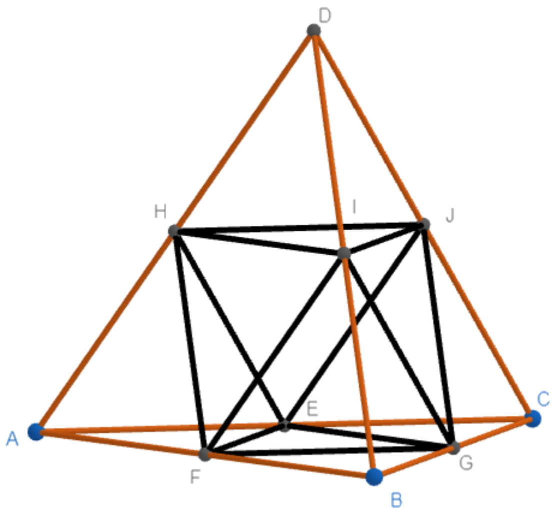
2. Odpowiedź: 42.

Po pierwsze, zauważmy, że cyfra jedności musi być większa lub równa 6, ponieważ $6 = 1+2+3$, czyli jest to najmniejsza suma trzech różnych cyfr, różnych od 0. Jest to jedyne przedstawienie szóstki w ten sposób. Każde przedstawienie cyfry jedności w postaci sumy tych trzech różnych cyfr generuje nam 6 liczb zielonych. Czyli w przypadku szóstki dostajemy 1236, 1326, 2136, 2316, 3126, 3216. Pozostaje sprawdzić, na ile sposobów da się przedstawić cyfry $7, 8, 9$ jako takie sumy. $7 = 1 + 2 + 4$, $8 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$, $9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4$. Ponieważ otrzymaliśmy 7 możliwych rozkładów i żadne dwa z tych rozkładów nie dają tej samej liczby, to liczb zielonych jest $7 \cdot 6 = 42$.

Za zauważenie, że cyfra jedności musi być nie mniejsza niż 6 – 2 pkt.

Za błędne policzenie, ile liczb generuje jeden rozkład, odejmujemy 3 pkt.

3. Rysunek tych figur prezentujemy poniżej.



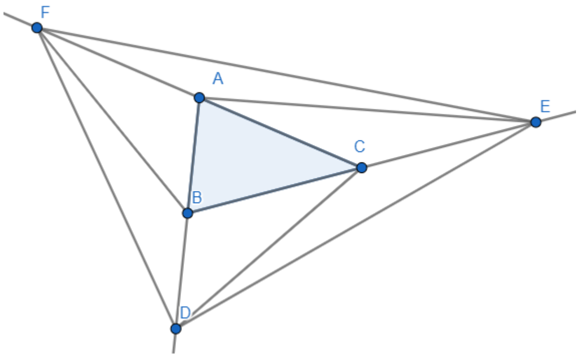
Aby obliczyć objętość sześciościanu wystarczy wziąć objętość wyjściowego czworościanu i odjąć objętość czworościanów $AEFH$, $BFGI$, $CEGJ$ oraz $DIHJ$. Są to czworościany foremne, ponieważ mają wszystkie krawędzie długości $\frac{1}{2}$. Wynika to z faktu, że odcinek łączący środki dwóch krawędzi w trójkącie równobocznym ma długość równą połowie długości krawędzi (wynika to z podobieństwa trójkątów). Czyli szukana objętość wynosi

$$\frac{\sqrt{2}}{12} - 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

Za poprawny rysunek przyznajemy 3 punkty.

Za rozwiązanie poprawne, ale bez uzasadnienia, że obcinane czworościany są foremne, odejmujemy 3 punkty.

4. Zaczynamy od połączenia punktów A z E, B z F i C z D. Z warunków zadania wiemy, że $|AB| = |BD|$, $|BC| = |CE|$, $|CA| = |AF|$.



Zauważmy, że trójkąty ABC i ABF mają podstawy AC i AF równej długości i tą samą wysokość. A zatem mają równe pola. Analogicznie dostajemy, że trójkąty ABC i BCD oraz ABC i CAE mają równe pola. Dostaliśmy więc, że trójkąty ABF, BCD i CAE mają pola równe 1. Przeprowadzając podobne rozumowanie dostajemy, że trójkąty ABF i BFD, BCD i CDE, CAE i AEF mają równe pola. Stąd pole trójkąta DEF jest sumą pól siedmiu trójkątów o polach równych 1, czyli wynosi 7.

Za zauważenie równości odpowiednich odcinków – 1 pkt.

Za zauważenie równości pól wybranych dwóch trójkątów – 3 pkt.

5. Są dwie takie liczby: 1210 i 2020. Można ich szukać następująco. Po pierwsze, z konstrukcji liczb wynika, że suma ich cyfr musi wynosić 4. Po drugie, również z konstrukcji wynika, że wszystkie cyfry muszą być nie większe niż 3. Jedyna liczba w której mogłaby pojawić się cyfra 3 to 0003, ale nie spełnia ona warunków zadania. Czyli liczba tysięcy może wynosić albo 1 albo 2. Dalej już pozostaje wpisać cyfry 0, 1 i 2, tak aby cyfra spełniała warunki.

Podanie jednej z tych liczb oraz uzasadnienie, że spełnia ona warunki zadania uznajemy za pełne rozwiązanie warte maksymalnej liczby punktów. Nie wymagamy wyjaśniania, jak uczeń znalazł tę liczbę.

Za obserwację, że suma cyfr musi wynosić 4 – 4 pkt.

Za obserwację, że wszystkie cyfry muszą być nie większe niż 3 – 2 pkt.

Za wszelkie inne poprawne obserwacje przyznajemy 0-4 pkt.

6. Odpowiedź: Trzecia biedronka ma 4 kropki na grzbiecie, pozostałe mają 5.

Po pierwsze zauważmy, że biedronki, które zawsze kłamią, muszą mieć 5 kropek na grzbiecie. Po drugie, co najmniej 3 z biedronek musiały kłamać. Czyli możliwe sumy jakie mogły się zdarzyć na spotkaniu to $5+5+5+4=19$, $5+5+5+5=20$ lub $5+5+5+6=21$. Ale 20 odpada, bo wtedy czwarta biedronka mówiła by prawdę i miała 5 kropek, a tak nie może się zdarzyć. I 21 odpada, bo wtedy żadna biedronka nie mówiła by prawdy, a któraś miała by 6 kropek na grzbiecie. Czyli trzecia biedronka mówi prawdę.

Za zauważenie, że co najmniej 3 biedronki mają 5 kropek – 4 pkt.

7. Odpowiedź: Jedyną możliwością jest zmiana o 0%.

Niech długość boku kwadratu wynosi a, a procent, o jaki wydłużamy – x. Wtedy pole nowego kwadratu wyniesie $(1+\frac{x}{100})a^2$, bo zwiększyło się o x procent. Z drugiej strony to samo pole wyniesie $((1+\frac{x}{100})a)^2$, bo każdy z boków jest wydłużamy. Otrzymujemy równanie (*)

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)a^2 = \left(\left(1+\frac{x}{100}\right)a\right)^2.$$

Upraszczamy, otrzymując $\left(1+\frac{x}{100}\right) = \left(1+\frac{x}{100}\right)^2$, czyli $1+\frac{x}{100}=1$, a zatem $x=0$.

Za nieskomentowanie dopuszczalności obustronnego dzielenia przez zmienną odejmujemy 1-2 punkty. Za zapisanie równania (*) przyznajemy 4 punkty.

8. Podzielmy dwanaście lat z zadania na cztery zbiory: $\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{10,11,12\}$. Zbiory są cztery, a kontrole trzy – zatem w którymś z tych zbiorów kontrola nie wystąpiła (z zasady szufladkowej Dirichleta – nie odejmujemy punktów za niepowołanie się na tę nazwę, lecz warto wspomnieć, że ona istnieje). Lata należące do tego zbioru to trzy następujące kolejno lata bez kontroli.

9. Autor wypowiedzi nie jest prawdomówny. Koleżanka może być albo prawdomówna, albo nie.

Koleżanka nie mogła powiedzieć, że kłamie, ponieważ bez względu na jej prawdomówność zdanie nie ma sensu. Jeśli koleżanka jest prawdomówna, skłamała - więc sprzeczność. Jeśli kłamie, to powiedziała prawdę - sprzeczność. Zawsze powiedziałaby, że mówi prawdę.

Za rozwiązanie, w którym dopuszczono, że autor wypowiedzi może mówić prawdę nie przyznajemy punktów. Za poprawne ustalenie, że autor jest kłamcą, przy pominięciu jednego z możliwych „statusów” koleżanki przyznajemy maksymalnie 5 pkt. Za poprawne wskazanie statusu obu osób przyznajemy 10 pkt.

10. Odpowiedź: W pierwszym rejsie na drugą stronę rzeki przepłynęli dwaj malcy. Jeden pozostał, drugi wrócił i wysiadł. Następnie do łódki wsiadł jeden piechur i przepłynął rzekę i pozostał na drugim brzegu, zaś czekający tam malec wrócił. Operację możemy powtórzyć dowolną liczbę razy. Liczba piechurów nie gra zatem roli – przewiezienie ich jest zawsze możliwe. Ponadto trzeci malec nie jest potrzebny.

Za negatywną odpowiedź nie przyznajemy punktów. Za pozytywną odpowiedź używającą całej trójki malców przyznajemy maksymalnie 6 pkt.