Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Mecz 3 (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, której suma cyfr jest równa 2023?

2. W roztworze soli znajdowało się 80% wody. Po pewnym czasie trochę wody wyparowało i masa całego roztworu zmniejszyła się czterokrotnie. Ile procent wody znajduje się obecnie w roztworze?

3. Czy suma pięciu kolejnych liczb naturalnych może być liczbą pierwszą?

4. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB poprowadzono dwusieczną z kąta przy wierzchołku A, która przecięła odcinek |BC| w punkcie D. Kąt CAD ma miarę α. Jaką miarę ma kąt ADC?

5. Kasia na urodziny dostała pieniądze od mamy, taty i babci. Od mamy dostała 100 zł, od taty połowę kwoty, którą dostała od mamy i babci, a od babci jedną trzecią kwoty, którą dostała od mamy i taty. Ile pieniędzy razem dostała Kasia?

6. Zegar ścienny babci Wojtka śpieszy się 1 minutę na godzinę, a jej budzik spóźnia się 3 minuty na godzinę. Wojtek wczoraj nastawił zegar i budzik na właściwą godzinę. Gdy dzisiaj rano Wojtek chciał sprawdzić godzinę, okazało się, że zegar pokazuje godzinę 7:00, a budzik godzinę 6:00. O której godzinie Wojtek nakręcił zegar i budzik?

7. W zawodach lekkoatletycznych wystartowało 39 zawodników (każdy brał udział w przynajmniej jednej konkurencji). W biegu na 100m wzięło udział 27 osób, w skoku w dal - 25 osób, a w rzucie piłeczką palantową - 26 osób. Niektórzy startowali w dwóch albo nawet trzech konkurencjach. Zawodników, którzy startowali jednocześnie w biegu i skoku było 18, tych, którzy startowali i w skoku, i rzucie - 15, a tych, którzy brali udział i w biegu, i rzucie - 16. Ile osób startowało tylko w jednej konkurencji?

8. Z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego ABC poprowadzono wysokość CD, która podzieliła przeciwprostokątną AB na odcinki o długościach 16 cm i 9 cm. Oblicz pole trójkąta ABC.

9. Pewien graniastosłup ma dwa razy więcej wierzchołków niż pewien ostrosłup. Który z tych wielościanów może mieć więcej ścian i o ile?

10. Pociąg długości 600 m jechał z prędkością $48\frac{\text{km}}{\text{h}}$ i miał przed sobą tunel. Od momentu wjechania początku lokomotywy do tunelu do chwili, w której koniec ostatniego wagonu opuścił tunel, upłynęło 2,5 minuty. Jaka była długość tunelu?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2022/23

Mecz 3 - rozwiązania (SP 7-8, runda eliminacyjna)

1. Żeby znaleźć najmniejszą liczbę, chcemy zminimalizować liczbę jej cyfr. Stąd wniosek, że liczba powinna się składać z jak największej liczby dziewiątek. $2023 : 9 = 224r.7$, więc nasza liczba może się składać z 224 dziewiątek i jednej siódemki. Żeby stworzyć jak najmniejszą liczbę siódemkę kładziemy jako pierwszą cyfrę. Jakiekolwiek modyfikacje, czyli np zamienienie jednej dziewiątki na ósemkę, sprawia, że siódemkę również będziemy musieli zamienić na ósemkę. Użycie mniejszej cyfry niż siedem zmuszałoby nas do użycia więcej niż 225 cyfr, więc automatycznie powstała liczba byłaby większa. Zatem najmniejszą liczbą będzie 79999999…999999, gdzie dziewiątek będzie 224.
2. **60%** Oznaczmy początkową masę roztworu jako x. Wtedy w roztworze było $0.9x$ wody i $0.1x$ soli. Po odparowaniu całego roztworu zostanie $0.25x$. Wtedy $0.1x$ soli będzie stanowiło $\frac{0.1x}{0.25x} = 0.4$. Soli jest 40%, więc wody 60%.
3. **Nie.** Oznaczmy pięć kolejnych liczb naturalnych jako $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, $n \in \mathbb{N}$. Wtedy ich suma wynosi $n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 = 5n + 10 = 5(n + 2)$. Zatem suma ta jest zawsze podzielna przez 5, czyli nie może być liczbą pierwszą.
4. Kąt CAD ma miarę α, zatem kąt BAD również. Ponieważ trójkąt jest równoramienny, więc $\angle CAB = \angle ABC = 2\alpha$. Zatem $\angle ACB = 180° - 4\alpha$. Dalej $\angle ADC = 180° - \angle DCA - \angle CAD = 3\alpha$.
5. **Kasia dostała 240 zł.** Oznaczmy jako m, t, b kwoty, które Kasia dostała kolejno od mamy, taty i babci. Dostajemy równania: $b = \frac{1}{3}(t + m)$, $t = \frac{1}{2}(b + m)$. Rozwiązujemy układ równań i otrzymujemy, że $4m = 5t$. Podstawiamy $m = 100$, więc $t = 80$. Stąd $b = \frac{1}{3}(t + m) = \frac{1}{3}(100 + 80) = 60$. Zatem łącznie Kasia dostała $100z + 80z + 60z = 240z$.
6. **O godzinie 15.45.** Budzik spóźnia się 3 minuty na godzinę, a zegar ścienny spieszy się o minutę, więc łącznie zegar jest 4 minuty na godzinę do przodu w stosunku do budzika. Skoro różnica między pokazywanymi godzinami to jedna godzina, to znaczy, że minęło 15 godzin od nakręcenia zegarów. Skoro zegar ścienny spieszy się minutę na godzinę, to po 15 godzinach jest 15 minut do przodu, czyli w rzeczywistości jest 6.45. 15 godzin temu była 15.45.
7. **10 osób.** Policzmy, ile osób startowało w biegu lub skoku w dal. Było ich $27 + 25 - 18 = 34$. Oznacza to, że pozostałe 5 osób startowało tylko w rzucie piłeczką. Analogicznie liczymy, że osób startujących tylko w skoku w dal było $39 - (27 + 26 - 16) = 2$, a tylko w biegu $39 - (25 + 26 - 15) = 3$. Czyli łącznie $5 + 2 + 3 = 10$ osób startuje tylko w jednej konkurencji.
8. **150cm^2**. Niech $|AD| = 9$ cm, $|DB| = 16$ cm. Oznaczmy $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|CD| = h$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $a^2 + h^2 = 16^2$, $b^2 + h^2 = 9^2$, $a^2 + b^2 = 25^2$. Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy $h = 12$ Stąd liczymy pole $P = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150$.
9. **Graniastosłup ma o dwie ściany więcej**. Oznaczmy liczbę wierzchołków ostrosłupa jako x, a graniastosłupa jako $2x$. Wtedy ostrosłup ma w podstawie wielokąt o $x - 1$ wierzchołkach, zatem ostrosłup ten ma x ścian. Graniastosłup ma za to w podstawie wielokąt o x wierzchołkach, czyli $x + 2$ ścian. Stąd graniastosłup zawsze ma o dwie ściany więcej niż ostrosłup.
10. **1400m.** Oznaczmy długość tunelu jako x. Żeby cały pociąg minął tunel, początek lokomotywy musi przebyć drogę $x + 600$ metrów. Zamieniamy jednostki prędkości $v = 48\frac{\text{km}}{\text{h}} = 800\frac{\text{m}}{\text{min}}$. Obliczamy drogę przebytą w ciągu 2,5 minuty $s = v * t = 800 * 2.5 = 2000$ metrów. Stąd $x + 600 = 2000$, czyli $x = 1400$ metrów.