Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2024/25

Eliminacje (klasy 7-8 SP)

1. Liczba a przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2. Udowodnij, że liczba a podniesiona do kwadratu a następnie powiększona o 1 jest podzielna przez 5.

2. Bronia napisała na tablicy liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. W każdym ruchu do dowolnych dwóch z nich Bronia dodaje 1. Czy może takim sposobem otrzymać sześć jednakowych liczb?

3. Dane jest 2025 liczb naturalnych. Ich suma jest podzielna przez 3. Dowiedź, że suma ich sześcianów również jest podzielna przez 3.

4. Aldona i Bonifacy zbierają znaczki. Bonifacy ma trzy razy więcej znaczków niż Aldona, lecz gdyby dał jej 15 swoich znaczków, to miałby tylko dwa razy więcej niż ona. Ile (zamiast 15) musiałby jej dać swoich znaczków, aby mieli ich tyle samo?

5. Liczba $a679b$ jest podzielna przez 72. Znajdź cyfry a i b.

6. Udowodnij, że nie istnieje liczba pierwsza postaci $99\ldots91$ gdzie cyfra 9 występuje nieparzystą liczbę razy.

7. Wśród 11 kulek 2 są radioaktywne. Dla dowolnego podzbioru kulek potrafimy sprawdzić czy zawiera on co najmniej jedną radioaktywną kulkę. Czy da się znaleźć obie radioaktywne kulki wykonując co najwyżej 7 pomiarów?

8. Miary kątów ABC przy wierzchołkach A, B i C pozostają w stosunku $5 : 4 : 9$. Na boku AB zaznaczono też jego środek – punkt D. Z wierzchołka C opuszczono wysokość CE. Jaka jest miara kąta $\sphericalangle DCE$?

9. Dwa pociągi, osobowy i pospieszny, kursują między Wrocławiem a Ustką. Pociągi poruszają się ze stałą prędkością. Pociągi wyruszają w tym samym momencie w przeciwne strony, mijając się o godzinie 15:00. Pociąg pospieszny dociera do celu tego samego dnia o 23:00, a pociąg osobowy następnego dnia o 9:00. O której godzinie pociągi ruszyły?

10. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawa AB jest dłuższa od podstawy CD, a przekątne przecinają się pod kątem prostym. Podstawy mają długość odpowiednio 16 i 12. Jaką długość ma ramię trapezu?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2024/25

Rozwiązania zadań (klasy 7-8 SP)

1. Liczbę a można zapisać jako $5b+2$ dla pewnej naturalnej liczby b. Wówczas podnosimy do kwadratu: $(5b+2)^2 = 25b^2 + 20b + 4$ i powiększamy o 1 otrzymując $25b^2 + 20b + 5$, skoro każdy składnik sumy jest podzielny przez 5, to cała suma jest.

Alternatywne rozwiązanie. Rozwiązanie wyliczające resztę z dzielenia przez 5 (jako $2^2+1=5$) także jest poprawne.

2. Zauważmy, że na początku suma liczb napisanych na tablicy jest nieparzysta. Dodanie 1 do dwóch dowolnych liczb nie zmienia parzystości sumy liczb na tablicy. Jeżeli dostalibyśmy po takich ruchach w końcu sześć identycznych liczb, to ich suma musiałaby być nieparzysta. Jest to niemożliwe ponieważ ta suma byłaby podzielna przez 6, w szczególności przez 2.

3. Teza jest oczywiście prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej w miejsce liczby 2025. Niech więc dane w treści liczby to $a_1, \ldots, a_n$. Wówczas zauważmy, że dla każdego i: $a_i^3 - a_i = a_i(a_i^2 - 1) = a_i(a_i - 1)(a_i + 1)$. Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 3, bo któraś z nich na pewno jest podzielna przez 3. A zatem suma sześcianów wszystkich liczb po odjęciu sumy wszystkich liczb jest podzielna przez 3. Skoro więc suma liczb także była podzielna przez 3, to otrzymujemy tezę.

Uwaga. Sprawdzenie, że x^3 i x mają taką samą resztę z dzielenia przez 3 dla dowolnego x można też wykonać *ręcznie*, tzn. rozpatrując trzy możliwe reszty z dzielenia przez 3. Za takie podejście nie należy odejmować punktów.

4. Jeżeli a oznacza liczbę znaczków Aldony, to wiemy, że Bonifacy ma $3a$ znaczków, oraz że zachodzi równość $3a - 15 = 2(a + 15)$. Po rozwiązaniu otrzymujemy $a = 45$, czyli Aldona ma znaczków 45, natomiast Bonifacy ma ich 135. Nie trzeba tego liczyć oczywiście, ponieważ jak widać skoro on ma $3a$ znaczków, a ona a, to wystarczy, że da jej a znaczków. Zatem Bonifacy musi jej dać 45 znaczków.

Rozwiązanie alternatywne. Niech a oznacza liczbę znaczków Aldony. Aldona i Bonifacy mają razem $4a$ znaczków i ta łączna liczba nie zmienia się po przekazaniu znaczków przez Bonifacego. Ponieważ wtedy Bonifacy ma dwa razy więcej znaczków, to Aldona ma ich

$$\frac{1}{3} \cdot 4a = \frac{4a}{3},$$

czyli jej liczba znaczków wzrasta o $\frac{1}{3}$. Stąd mamy

$$\frac{a}{3} = 15 \implies a = 45,$$

i tyle znaczków Bonifacy musi dać Aldonie.

5. Liczba jest podzielna przez 72 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 8 i przez 9. Liczba jest podzielna przez 8 dokładnie wtedy, gdy liczba złożona z jej trzech ostatnich cyfr jest podzielna przez 8. Zatem b musi być równe 2. Liczba jest podzielna przez 9 dokładnie wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9. Zatem a jest równe 3.

6. Przypuśćmy, że liczba dziewiątek użytych do zapisu wynosi $2n-1$. Wtedy $99\ldots91 = 10^{2n}-9 = (10^n)^2 - 3^2 = (10^n-3)(10^n+3)$. Żaden z uzyskanych czynników nie jest równy 1 zatem liczba jest złożona.

7. Podzielmy wszystkie kulki poza jedną na 5 grup po 2 kulki i sprawdźmy radioaktywność każdej z nich. Jeżeli 2 grupy były radioaktywne, sprawdzamy po jednej kulce z każdej z tych grup, co pozwala rozstrzygnąć, która kulka w danej parze była radioaktywna. Jeżeli tylko jedna para była radioaktywna, to sprawdzamy radioaktywność obu kulek z tej pary. Jeżeli obie były radioaktywne, znaleźliśmy szukane dwie kulki radioaktywne. W przeciwnym przypadku drugą radioaktywną kulką jest ta, którą odłożyliśmy na początku.

8. Miary kątów trójkąta to 50, 40, 90 stopni. Ponieważ kąt przy A jest większy, kolejność punktów na boku AB to A, E, D, B. Kąt przy wierzchołku C jest prosty. Poniżej dowodzimy, że z tego wynika

$$|CD| = |BD|.$$

Powyższy fakt dowodzimy następująco: jeśli wykonamy symetrię środkową względem punktu D, punkty A i B przejdą na siebie nawzajem, a punkt C na *nowy* punkt C'. Czworokąt $AC'BC$ jest prostokątem, więc jego przekątne są równej długości i punkt przecięcia dzieli je na pół, skąd mamy

$$|CD| = \frac{|CC'|}{2} = \frac{|AB|}{2} = |BD|.$$

Wracając do rozwiązania zadania, trójkąt CBD jest równoramienny, więc

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = 40^\circ.$$

Trójkąt CAE jest prostokątny, więc

$$\sphericalangle ACE = 90^\circ = \sphericalangle CAB = 40^\circ.$$

Stąd obliczamy, że

$$\sphericalangle DCE = 10^\circ.$$

9. Niech l_1, l_2 oznaczają drogę pokonaną przez pociągi osobowy i pospieszny od wyruszenia do miejsca spotkania pociągów, a t – czas od wyruszenia do spotkania. Przy tych oznaczeniach prędkości pociągów to

$$\frac{l_1}{t}, \frac{l_2}{t}.$$

Po spotkaniu pociąg osobowy podróżował jeszcze 18 h, a pociąg pospieszny 8 h. Mamy zatem układ

$$\frac{l_1}{t} \cdot 18 = l_2$$
$$\frac{l_2}{t} \cdot 8 = l_1.$$

Mnożąc równania stronami, otrzymujemy

$$\frac{l_1 l_2}{t^2} \cdot 144 = l_1 l_2,$$

więc

$$t^2 = 144 \implies t = 12.$$

10. Niech E oznacza punkt przecięcia przekątnych. Z symetrii, trójkąty ABE i CDE są równowramienne, a z warunków zadania także prostokątne. Mamy zatem

$$AE = \frac{16}{\sqrt{2}}$$
$$DE = \frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Z tw. Pitagorasa zatem

$$AD = 10\sqrt{2}.$$