Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz finałowy (licea)

1. Ciągi q_n, p_n są zadane następującymi zależnościami rekurencyjnymi:

$$q_n = \begin{cases} a_1, & \text{gdy } n = 0 \\ a_2, & \text{gdy } n = 1 \\ q_{n-1} + q_{n-2}, & \text{gdy } n \geq 2 \end{cases} \qquad p_n = \begin{cases} b_1, & \text{gdy } n = 0 \\ b_2, & \text{gdy } n = 1 \\ p_{n-1} + p_{n-2}, & \text{gdy } n \geq 2 \end{cases}$$

Niech $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ i $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$. W zależności od a_1, a_2, b_1, b_2 oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{p_n}$.

2. Udowodnij, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $\sin(\cos x) \leq \cos(\sin x)$.

3. Czy istnieje taka trójka liczb naturalnych (n, m, k), że liczby n i m są pierwsze oraz

$$n^{21} + m^5 = k^{2022}?$$

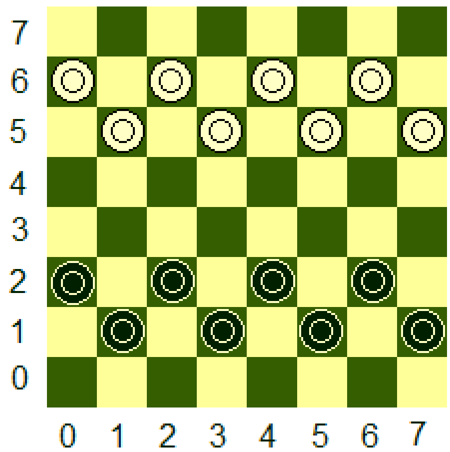
4. Pokaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ zachodzi równość

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{mk\binom{n}{m}\binom{n-m}{k}}{\binom{n}{2}} = 2 \cdot 3^{n-2}.$$

5. Wyznacz z dokładnością do 0,001 jedyny pierwiastek rzeczywisty wielomianu $x^5 + 2x + 1$.

6. W trójkącie ABC zaznaczono punkty D i E odpowiednio na bokach BC i CA w taki sposób, że $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBE$ oraz $[AXE] = [BXD]$ dla X będącego punktem przecięcia odcinków AD i BE, gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Udowodnij, że odcinki CD i CE mają równą długość.

7. Jacek i Placek grają w *warcaby na walcu* na planszy 8×8. Wprowadzamy układ współrzędnych, jak na rysunku obok (np. pole w lewym górnym rogu planszy ma współrzędne $(0, 7)$). Przez $r_8(n)$ oznaczamy resztę z dzielenia liczby n przez 8. Ruch polega na przemieszczeniu pionka stojącego na polu (a, b) na pole $(a \pm_1 1, r_8(b \pm_2 1))$, lub na pole $(a \pm_1 2, r_8(b \pm_2 2))$, jeśli na polu $(a \pm_1 1, r_8(b \pm_2 1))$ znajduje się pionek przeciwnika, gdzie $\pm_1$, $\pm_2$ oznaczają dowolny ze znaków $+$ lub $-$. W drugim przypadku pionek przeciwnika jest usuwany z planszy. Gra kończy się w momencie, gdy na szachownicy zostaną pionki tylko jednego koloru. Jacek gra białymi i rozpoczyna grę, a Placek gra czarnymi. Obaj gracze wykonują ruchy na zmianę. Czy Placek może grać w taki sposób, aby bez względu na ruchy Jacka gra nigdy się nie skończyła?



8. Żółw Stefan porusza się w następujący sposób: najpierw przemieszcza się do przodu o x, a następnie obraca się w lewo o kąt α. Stefan będzie chodził tak długo, aż znajdzie się w położeniu początkowym (to jest w takim samym miejscu i ustawiony pod takim samym kątem). Sprawdź, dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ wędrówka żółwia się skończy.

9. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$, w którym przez M oznaczamy środek boku BC. Wiedząc, że $AB = 4$ i $\sphericalangle AMS = 75^\circ$ wyznacz objętość ostrosłupa $ABCDS$.

10. Pokaż, że dla nieujemnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ takich, że $x^3 + y^4 + z^5 < 3$ zachodzi nierówność

$$(x^3y^4z^5)^{\frac{1}{6}} < x^2 + y^2 + z^2.$$

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz finałowy – rozwiązania (licea)

1. Za pomocą indukcji matematycznej można łatwo udowodnić, że $q_n = a_1F_{n-1} + a_2F_n$, oraz $p_n = b_1F_{n-1} + b_2F_n$ dla $n \geq 1$, gdzie F_n jest n-tą liczbą Fibonacciego. Korzystając z jawnego wzoru na liczby Fibonacciego, obliczmy daną w zadaniu granicę:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1F_{n-1} + a_2F_n}{b_1F_{n-1} + b_2F_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)a_1 + \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)a_2}{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)b_1 + \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)b_2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} a_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} a_2}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} b_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} b_2} = \frac{a_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a_2}{b_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)b_2}$$

Uwaga: Pełne rozwiązanie obejmuje uzasadnienie wzoru na n-tą liczbę Fibonacciego oraz przeprowadzenie kompletnego rozumowania indukcyjnego w celu wyznaczenia wzoru na q_n i p_n.

2. Zauważmy, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $|\sin x| \leq |x|$. Stąd mamy

$$\sin(\cos x) \leq |\sin(\cos x)| \leq |\cos x|.$$

Zbiorem wartości funkcji sin jest przedział $[-1, 1]$, na którym z kolei funkcja cos przyjmuje wartości dodatnie. Funkcja cos jest parzysta i malejąca na przedziale $[0, 1]$, a więc mamy

$$|\cos x| = \cos x = \cos|x| \leq \cos(|\sin x|) = \cos(\sin x).$$

3. Równanie podane w treści zadania możemy przekształcić równoważnie do postaci

$$m^5 = k^{2022} - n^{21} = \left(k^{674}\right)^3 - \left(n^7\right)^3 = (k^{674} - n^7)(k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14}).$$

Skoro liczba m jest pierwsza, to czynniki występujące po prawej stronie powyższej równości muszą być co do modułów potęgami m o całkowitych wykładnikach. Drugi czynnik jest zawsze dodatni, zatem nie ma potrzeby rozpatrywać przypadków, w których czynniki są ujemne.

Mamy 6 przypadków:

(a) $k^{674} - n^7 = 1$ oraz $k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} = m^5$

Pierwszą równość możemy przekształcić równoważnie do postaci

$$n^7 = k^{674} - 1 = \left(k^{337}\right)^2 - 1 = (k^{337} - 1)(k^{337} + 1).$$

Skoro liczba n jest pierwsza, to liczby $k^{337} - 1$ i $k^{337} + 1$ muszą być potęgami n o całkowitych wykładnikach. Łatwo zauważyć, że muszą to być kolejne potęgi n, a więc odpowiednio $k^{337} - 1 = n^3$ i $k^{337} + 1 = n^4$. Stąd $n^4 = n^3 + 2$, a więc dla naturalnych n sprzeczność.

(b) $k^{674} - n^7 = m$ oraz $k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} = m^4$
Podstawmy $n^7 + m$ za k^{674} w drugim równaniu. Mamy

$$m^4 = \left(n^7 + m\right)^2 + \left(n^7 + m\right) n^7 + n^{14} = n^{14} + 2n^7m + m^2 + n^{14} + n^7m + n^{14} = 3n^{14} + 3n^7m + m^2.$$

Stąd $3n^{14}$ jest podzielne przez m. Jeżeli $m = 3$, to $81 = m^4 = k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} \geq 2^{1348}$, co prowadzi do oczywistej sprzeczności. W przeciwnym razie m dzieli n^{14}, co w połączeniu z pierwszością obu liczb oznacza $n = m$.
Po podstawieniu $n = m$ do uzyskanego wyrażenia na m^4 uzyskujemy

$$m^4 = 3m^{14} + 3m^8 + m^2,$$

co jest oczywistą sprzecznością.

(c) $k^{674} - n^7 = m^2$ oraz $k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} = m^3$
Z pierwszej równości $k^{674} > m^2$, więc w drugiej

$$m^3 = k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} > k^{1348} > m^4,$$

co jest sprzecznością.

(d) $k^{674} - n^7 = m^3$ oraz $k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} = m^2$
Z pierwszej równości $k^{674} > m^3$, więc w drugiej

$$m^2 = k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} > k^{1348} > m^6,$$

co jest sprzecznością.

(e) $k^{674} - n^7 = m^4$ oraz $k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} = m$
Z pierwszej równości $k^{674} > m^4$, więc w drugiej

$$m = k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} > k^{1348} > m^8,$$

co jest sprzecznością.

(f) $k^{674} - n^7 = m^5$ oraz $k^{1348} + k^{674}n^7 + n^{14} = 1$
Po lewej stronie drugiej równości są trzy dodatnie liczby całkowite, a po prawej 1, co jest sprzecznością.

Żaden z rozpatrzonych przypadków nie zakończył się znalezieniem odpowiedniej trójki, a zatem nie istnieje trójka spełniająca warunki zadania.

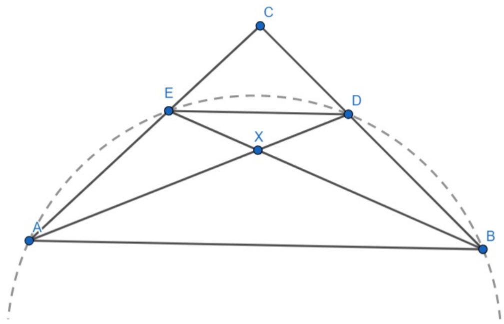
4. Przekształćmy tezę zadania do następującej postaci:

$$\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-m} mk \binom{n}{m} \binom{n-m}{k} = n(n-1)3^{n-2}$$

Zauważmy, że $n(n-1)3^{n-2}$ można odczytać jako liczbę sposobów, na które można włożyć n różnych przedmiotów do trzech rozróżnialnych worków i wyróżnienie po jednym elemencie w każdym z worków o numerach 1 i 2. $\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{m}\binom{n-m}{k}$ można interpretować w ten sam sposób, z tym że najpierw wybieramy m przedmiotów, które trafiają do worka 1 i wyróżniamy jeden z nich na m sposobów, a następnie k przedmiotów, które trafiają do worka 2 i wyróżniamy jeden na k sposobów. Zaznaczmy, że m i k przebiegają wszystkie możliwe wartości od 0 do n.
Ponieważ obie strony równania mają identyczną interpretację kombinatoryczną, zatem są sobie równe.

5. Oznaczmy $f(x) = x^5 + 2x + 1$ Wyznaczymy ten pierwiastek metodą krzywych Newtona. Z własności Darboux wiemy, że pierwiastek znajduje się pomiędzy $-1/2$, a 0. Niech $g(x) = x - \frac{f'(x)}{f(x)}$. Wtedy $0,487 > g \circ g(-1/2) > 0,486$ i $0,487 > g \circ g \circ g(-1/2) > 0,486$ Zatem ponownie korzystając z własności Darboux zauważamy, że $0,486$ przybliża jedyny pierwiastek $f(x)$ z dokładnością $0,001$
Uwaga: Zadanie można rozwiązać też bez konieczności użycia metody stycznych Newtona, na przykład za pomocą algorytmu wyszukiwania binarnego i własności Darboux (sposób ten jest bardziej złożony rachunkowo).

6. Zauważmy, że skoro $[AXE] = [BXD]$, to również $[AED] = [BED]$. Ponieważ trójkąty AED i BED mają wspólną podstawę, to ich wysokości muszą być równej długości, zatem czworokąt $ABDE$ jest trapezem. Z drugiej strony skoro $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBE$ i punkty A i B leżą po tej samej stronie prostej DE, to na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg. Z powyższych dwóch faktów otrzymujemy, że $ABDE$ jest trapezem równoramiennym. Zatem trójkąt ABC również jest równoramienny, otrzymujemy więc $|CE| = |AC| - |AE| = |BC| - |BD| = |CD|$, czyli tezę.



7. Jest to możliwe. Zauważmy, że dla każdej pary pól (a_1, b_1), $(a_1, r_8(b_2+4))$ oba pola są na początku gry albo wolne, albo zajęte przez pionki należące do obu graczy. Placek może więc grać w taki sposób, że, jeśli Jacek ruszył pionkiem z pola (a_1, b_1), to Placek rusza pionkiem z pola $(a_1, r_8(b_2+4))$, zachowując wspomniany wcześniej niezmiennik. W ten sposób gra nigdy się nie skończy.

8. Wędrówka skończy się dokładnie wtedy, gdy $\alpha = q\pi$, gdzie $q \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Q}$. Jeśli $q = 2k\pi$, to żółw będzie się stale oddalał od położenia początkowego. Dla $q \notin \mathbb{Q}$ i dowolnych $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ zachodzi $qn\pi \neq 2k\pi$, bo po podzieleniu obu stron przez π po lewej stronie otrzymamy liczbę niewymierną, a po prawej wymierną.
Wystarczy rozważyć $q = \frac{a}{b}, q \neq 2k\pi, a, b, k \in \mathbb{Z}$. i ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny. Wtedy po b ruchach Stefan będzie obrócony o π względem położenia początkowego. Niech v będzie wektorem przemieszczenia zółwia w n-tym kroku, gdzie $n \leq b$. Wtedy wektorem przemieszczenia żółwia w $n+b$-tym ruchu będzie $-v$ (względem położenia po $n+b-1$-szym ruchu), zatem Stefan po $2b$ ruchach znajdzie się w położeniu początkowym i będzie ustawiony pod takim samym kątem, czyli jego wędrówka się skończy.

9. Niech X oznacza środek podstawy ostrosłupa tak jak na rysunku poniżej oraz niech $|SM| = h$, $|SX| = H$ i $|BS| = l$. Zauważmy, że skoro $\sphericalangle AMS = 75°$, to

$$\cos \sphericalangle AMS = \cos \frac{5\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

Zauważmy teraz, że z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MBS, twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MXS oraz twierdzenia cosinusów dla trójkąta MAS dostajemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} h^2 + 2^2 = l^2 \\ H^2 + 2^2 = h^2 \\ h^2 + (2\sqrt{5})^2 - 4\sqrt{5}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}h = l^2 \end{cases}.$$

Podstawiając pierwsze równanie do trzeciego dostajemy:

$$20 - (\sqrt{30} - \sqrt{10})h = 4$$

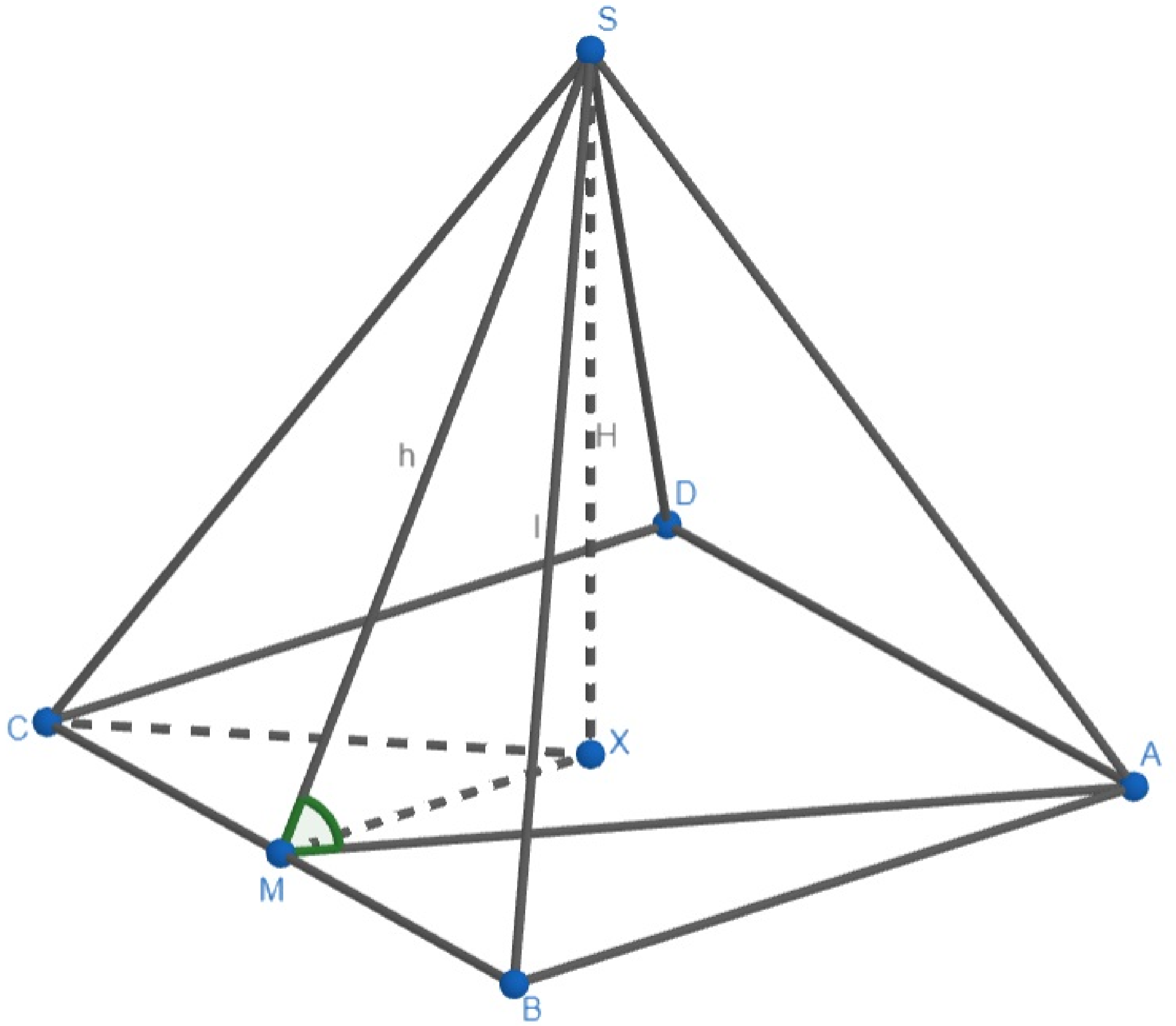
$$h = \frac{16}{\sqrt{30} - \sqrt{10}} = \frac{4}{5}(\sqrt{30} + \sqrt{10})$$

Następnie z drugiego równania wyznaczamy H:

$$H = \sqrt{\frac{16}{25}(40 + 20\sqrt{3}) - 4} = \sqrt{\frac{108}{5} + \frac{64}{5}\sqrt{3}}$$

Szukana objętość ostrosłupa wynoci zatem

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{\frac{108}{5} + \frac{64}{5}\sqrt{3}} = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{108}{5} + \frac{64}{5}\sqrt{3}}.$$



10. Niech $x = ta, y = tb, z = tc$ dla pewnych $a, b, c, t \in \mathbb{R}$. Podstawmy je do nierówności z tezy.

$(x^3y^4z^5)^{\frac{1}{6}} < x^2+y^2+z^2 \iff \left((ta)^3(tb)^4(tc)^5\right)^{\frac{1}{6}} < (ta)^2+(tb)^2+(tc)^2 \iff (a^3b^4c^5)^{\frac{1}{6}} < a^2+b^2+c^2$

Możemy zatem założyć, że $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Wtedy

$$(x^3y^4z^5)^{\frac{1}{6}} \leq \left(\frac{x^3 + y^4 + z^5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < 1 = x^2 + y^2 + z^2$$

co dowodzi tezę zadania.