Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

FINAŁ (SP 4-6)

1. W ciągu miesiąca trzy niedziele wypadły w dni parzyste. Jaki dzień wypadł dnia dwudziestego tego miesiąca?
2. Jaś ma na ścianie w pokoju mapę Polski o skali $1 : 500000$. Ile map potrzebowałby Jaś, aby pokryć takimi mapami powierzchnię całej Polski?
3. Liczby naturalne a i b spełniają równanie $a + b = 100$. Czy możliwe jest, żeby $151a + 193b = 12345$?
4. Na kalkulatorze zacięły się wszystkie cyfry oprócz dwójki. Jak uzyskać 23, dokładnie cztery razy klikając dwójkę?
5. Tablicę 3×3 podzielono na 9 jednakowych kwadratów, w których rozmieszczono liczby: $-1, 0, 1$. Uzasadnić, że wśród ośmiu sum (z trzech wierszy, trzech kolumn i dwóch głównych przekątnych) co najmniej dwie będą równe
6. W klasie liczącej 24 uczniów jest 12 uczniów uczących się języka francuskiego i 12 uczniów uczących się języka niemieckiego. Ilu uczniów nie uczy się żadnego języka, jeżeli wiadomo o trzech uczniach, którzy uczą się obydwu języków?
7. Na zawodach w konkursie matematycznym należało rozwiązać 10 zadań za każde poprawne rozwiązanie otrzymywało się 5 punktów, a za błędne traciło się 3 punkty. Każdy uczestnik rozwiązywał wszystkie zadania. Piotruś zdobył 34 punkty, Grzesiu 10 punktów a Tomek 2 punkty. Ile poprawnych rozwiązań przedstawiła ta trójka razem?
8. Kwadrat pocięto na 36 kwadratów. 35 z nich ma pole równe 1, natomiast trzydziesty szósty ma pole różne od 1. Ile wynosi pole tego kwadratu?
9. Jeżeli $A - 1 = B + 2 = C - 3 = D + 4 = E - 5$. to która z liczb A, B, C, D, E jest największa?
10. Pewien graniastosłup ma 333 krawędzi. Ile wierzchołków ma ten graniastosłup?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

FINAŁ – rozwiązania (SP 4-6)

1. **1.** Czwartek. Jeśli niedziela wypada trzykrotnie w dni parzyste, to musiało być 5 niedziel. Były one w dni $2, 9, 16, 23, 30$. Czyli $20dnia$ tego miesiąca był czwartek. *Za poprawne wyznaczenie, w jakie dni wypada niedziela, dajemy 7 punktów. Za poprawne wyznaczenie, jaki dzień wypadł 20 dnia, dajemy kolejne 3 punkty*

2. **2.** Przyjmijmy, że mapa Polski ma kształt przybliżony do prostokąta. wtedy długość i szerokość takiego prostokąta byłyby w rzeczywistości 500000 razy większe od długości i szerokości mapy w pokoju Jasia. Aby pokryć powierzchnię Polski takimi mapami, należy użyć $500000 \cdot 500000 = 250000000000 = 250$ mld map. *Schemat oceniania: 4 pkt za podanie przybliżenia Polski, 10 pkt. podanie prawidłowej odpowiedzi (i ewentualnie komentarz o stosowalności przybliżenia na pewno będzie atutem rozwiązania)*

3. **3.** Nie. Skoro $a + b = 100$ to a i b muszą być tej samej parzystości. Czyli liczba $151a + 193b$ jest zawsze parzysta. Nie może więc być równa 12345. *Za zauważenie, że a i b muszą być tej samej parzystości dajemy 5 punktów. Za zauważenie, że* $151a+193b$ *jest zawsze parzysta dajemy kolejne 5.*

4. **4.** $22 + \frac{2}{2} = 23$ *Schemat oceniania: 5 pkt. za częściowo poprawne wyrażenie, 10 pkt. - prawidłowa odpowiedź.* *<u>UWAGA!!!</u> Jeżeli uczniowie zapiszą poprawne działanie, ale wykonają błąd rachunkowy celu pokazania, że to rzeczywiście wychodzi* 23, *nie obcinamy punktów, tylko dajemy maksymalną liczbę punktów.*

5. **5.** Możliwe sumy to $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Jest ich 7, a skoro musimy otrzymać osiem sum, z zasady szufladkowej co najmniej jedna musi się powtarzać. *za poprawne rozpisanie możliwych sum dajemy 8 punktów, za wytłumaczenie czemu co najmniej jedna musi się powtarzać dajemy kolejne 2.*

6. **6.** 3 uczniów. Skoro 3 uczniów uczy się obu języków, zatem tylko języka francuskiego uczy się $12-3 = 9$ uczniów oraz tyle samo uczy się tylko języka niemieckiego. Zatem mamy już $9+9+3 = 21$ uczniów określonych z przynajmniej jednym językiem. Ponieważ wszystkich uczniów jest 24, więc tych nieuczących się żadnego języka jest $24 - 21 = 3$. *Schemat oceniania: 3 pkt. wyznaczenie liczby osób chodzących wyłącznie na jeden język (niemiecki lub francuski), 6 pkt. wyznaczenie liczby osób chodzących wyłącznie na jeden język (niemiecki i francuski), 10 pkt. poprawna odpowiedź.*

7. **7.** Niech x będzie liczbą poprawnie rozwiązanych zadań przez Piotrusia. Wówczas $(10 - x)$ jest liczbą błędnie rozwiązanych przez niego zadań. Liczba zdobytych przez Piotrusia punktów jest więc równa $5x - 3(10 - x) = 34$. Widzimy, że rozwiązaniem jest $x = 8$. Grzesiu rozwiązał poprawnie 5 zadań a Tomek 4.Łącznie było 17 poprawnych rozwiązań. *Schemat oceniania:* 2 *pkt. - oznaczenie zmiennych;* 5 *pkt. - ułożenie równania;* 8 *pkt. - rozwiązanie równania;* 10 *pkt. - rozwiązanie jest kompletne*

8. **8.** Zauważmy, że zawsze do co najmniej dwóch boków pociętego kwadratu przylegają tylko kwadraty jednostkowe. To oznacza, że długość boku tego kwadratu jest liczbą naturalną.
<u>*Do tego momentu przyznajemy 2 pkt.*</u>

Niech będzie nią y, natomiast x niech oznacza długość boku tego kwadratu, którego pole chcemy wyznaczyć. Z treści zadania wynika, że $y^2 = x^2 + 35$ lub też równoważnie $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = 35$. *Do tego momentu przyznajemy 5 pkt.*

Jako, że mają to być liczby naturalne (bowiem x, y są liczbami naturalnymi), więc zachodzą następujące warunki:

$$y - x = 1 \text{ oraz } y + x = 35;$$

$$y - x = 5 \text{ oraz } y + x = 7.$$

Do tego momentu przyznajemy 8 pkt.

W pierwszym przypadku otrzymujemy, że $x = 17, y = 18$, natomiast z drugiego – $x = 1, y = 6$. Ale ponieważ $x \neq 1$, więc otrzymujemy, że $x = 17$, co implikuje, że szukane pole wynosi 289. *Do tego momentu przyznajemy 10 pkt.*

9. Liczba E. Wyznaczamy E w zależności od pozostałych:

- $E = D + 9$
- $E = C + 2$
- $E = B + 7$
- $E = A + 4$

Za podanie dobrej odpowiedzi bez uzasadnienia dajemy 2 punkty, za poprawne uzasadnienie dodajemy kolejne 8.

10. Podstawą tego graniastosłupa jest 111-kąt. Czyli dany graniastosłup musi mieć 222 wierzchołki. *Za zauważenie że podstawą graniastosłupa jest 111-kąt dajemy 7 punktów. Za poprawne podanie liczby wierzchołków kolejne 3.*