Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

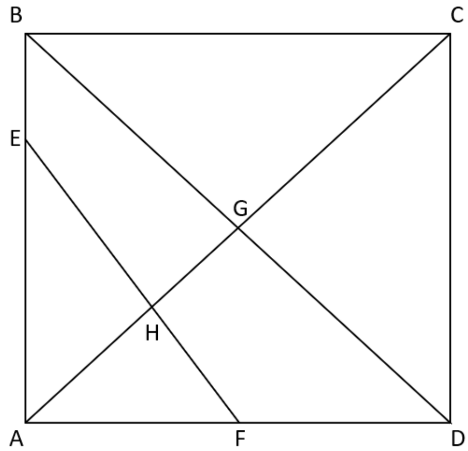
FINAŁ (SP 7-8)

1. Udowodnij, że jeśli liczba naturalna jest iloczynem pięciu kolejnych liczb naturalnych dodatnich, to jest także sumą pewnych pięciu kolejnych liczb naturalnych.

2. Na przyjęcie przyszły wyłącznie małżeństwa. Na koniec zabawy wszyscy goście żegnają się uściskiem dłoni ze wszystkimi, oprócz swojego małżonka. W sumie wymieniono 420 uścisków. Ile par przyszło na zabawę?

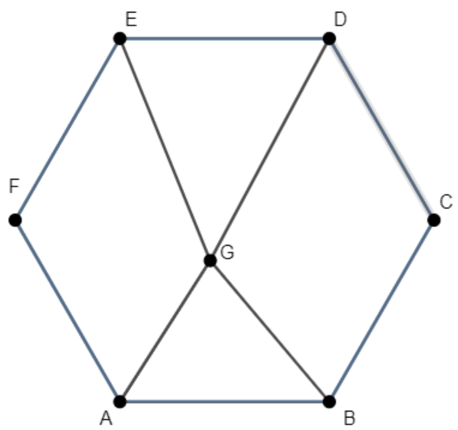
3. Magda spędziła urlop w wilgotnym lesie równikowym. Każdego dnia padał deszcz albo przez cały dzień, albo tylko rano, albo tylko po południu. W ciągu całego urlopu Magda miała dokładnie 11 deszczowych poranków, 12 deszczowych popołudni, a w sumie 13 częściowo słonecznych dni. Ile dni trwał urlop Magdy?

4. Długość boku kwadratu $ABCD$ wynosi 10, punkt F znajduje się w połowie długości boku AD, natomiast punkt E dzieli bok AB w stosunku $3:1$. Oblicz pole czworokąta $FDGH$.



5. Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x wyrażenie $5x^2 - 4x + 7$ przyjmuje wartość większą niż 5. *Uwaga: W rozwiązaniu nie można użyć wyróżnika funkcji kwadratowej (Δ).*

6. Wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$ wybrano punkt G tak, że pole trójkąta ABG wynosi 5, a pole trójkąta DEG wynosi 7. Ile wynosi pole całego sześciokąta?



7. Wielbłądzica Ala idzie z miasta A do B, natomiast wielbłądzica Basia z miasta B do A. Ruszają w tym samym momencie i idą dokładnie tą samą trasą. Każda z nich idzie ze stałą prędkością. Ala dotarła do miasta B po 48 minutach od spotkania Basi na trasie. Basia dotarła do miasta A po 5 godzinach od spotkania Ali na trasie. Ile czasu więcej zajęła cała podróż Basi?

8. Znajdź jedyny trzycyfrowy dzielnik pierwszy liczby 999999995904.

9. Niech $X_n = \frac{4n+\sqrt{(4n^2-1)}}{\sqrt{2n-1+\sqrt{2n+1}}}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Oblicz $Z_{2022} = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{2022}$.

10. Kacper poleciał samolotem na Wyspy Bergamuta. Wyleciał z lotniska w Europie o godzinie 10:00 czasu środkowoeuropejskiego, a wylądował na wyspach następnego dnia o 5:30 czasu lokalnego. Wracając do domu wystartował o 8:30 czasu lokalnego, a wylądował o 17:00 czasu środkowoeuropejskiego, tego samego dnia. Zakładając, że oba loty trwały tak samo długo, która godzina była na Wyspach Bergamuta, gdy Kacper doleciał do lotniska w Europie?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

FINAŁ (SP 7-8)

1. Dla liczby $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ chcemy znaleźć takie $m \in \mathbb{N}$, że

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = m + (m+1) + (m+2) + (m+3) + (m+4),$$

czyli

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 5m + 10 = 5(m+2).$$

Wyznaczamy

$$m = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} - 2.$$

Takie m jest liczbą naturalną, ponieważ mając pięć kolejnych liczb naturalnych n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ wiemy, że dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 5. Czyli liczby m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, $m+4$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, których suma daje rozważaną w zadaniu liczbę.

2. Odpowiedź: 15.

Zauważmy, że każde dwa małżeństwa żegnając się ze sobą wymieniają 4 uściski. Ponieważ małżonkowie nie wymieniają uścisków między sobą, to możemy każde małżeństwo potraktować jako jedną osobę, która z każdą inną osobą (małżeństwem) wymienia 4 uściski.

W standardowym problemie, gdzie n osób ściska sobie nawzajem ręce tylko raz, liczba uścisków wynosi

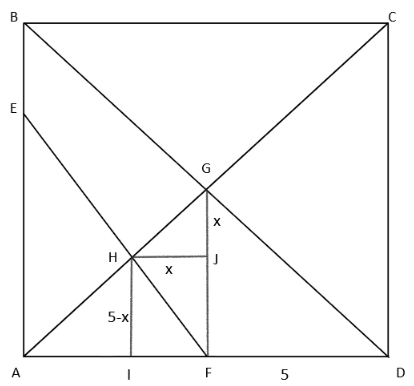
$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n-1)n}{2},$$

bo pierwsza wita się z $n-1$ osobami, kolejna jeszcze z $n-2$, itd.

Zatem w przypadku, gdy liczymy po 4 uściski dłoni otrzymujemy: $4 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = 420$. Stąd wynika, że na przyjęciu było $n = 15$ małżeństw.

3. Niech d będzie szukaną liczbą dni trwania urlopu. Wtedy $d-12$ to liczba dni, w które deszcz nie padał po południu, a $d-11$ to liczba dni, w które deszcz nie padał rano. Skoro nie było żadnego w pełni słonecznego dnia(mamy tylko 3 opcje), to $(d-11)+(d-12) = 13$
Zatem $d = 18$

4. Odpowiedź: 17.5.



Prowadzimy odcinki pomocnicze FG, HI oraz HJ takie, że HI i GF są równoległe, a HJ jest do nich prostopadły. Trójkąt GHJ jest trójkątem o kątach: $45°$, $45°$ i $90°$, więc $|HJ| = |GJ|$.

Długość tę oznaczamy przez x, stąd $|HI| = 5 - x$. Z podobieństwa trójkątów AFE i IFH otrzymujemy równość:

$$\frac{7,5}{5} = \frac{5-x}{x} \iff x = 2.$$

Zatem możemy policzyć pole trójkąta $FGH : \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ oraz trójkąta $FDG : \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12,5$. Stąd pole czworokąta $FDGH$ wynosi

$$12.5 + 5 = 17.5.$$

5. Wystarczy zauważyć, że

$$(5x^2 - 4x + 7) - 5 = 5x^2 - 4x + 2 = 3x^2 + 2(x+1)^2 > 0.$$

Ostatnia nierówność wynika z faktu, że pierwszy składnik sumy po lewej stronie wynosi zero się wyłącznie dla $x = 0$, a drugi dla $x = \pm 1$, czyli nigdy nie jest równa 0.

6. Odpowiedź: $3 \cdot (5 + 7) = 36$.

Prowadząc odcinki $|CG|$ i $|FG|$ otrzymujemy podział sześciokąta na 6 trójkątów. Wystarczy zauważyć, że sumy pól trójkątów na przeciwko, czyli $P_{ABG} + P_{DEG}$, $P_{BCG} + P_{FGE}$ oraz $P_{CDG} + P_{FAG}$ są takie same, ponieważ podstawy każdego trójkątów są tej samej długości, a sumy wysokości trójkątów w każdej z par są równe.

7. Niech a oznacza prędkość Ali, a b prędkość Basi. Niech x to odległość od miasta A do punktu ich spotkania, a y - odległość od miasta B do punktu ich spotkania. Z treści zadania dostajemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \\ \frac{y}{a} = 48 \\ \frac{x}{b} = 300 \end{cases}$$

a szukamy wartości $\frac{x+y}{b}$ i $\frac{x+y}{a}$. Przekształcając układ równań otrzymujemy, że $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$, skąd

$$\frac{x+y}{a} = \frac{x}{a} + 48 = \frac{300b}{a} + 48 = 300 \cdot \frac{2}{5} + 48 = 120 + 48 = 168$$

i analogicznie $\frac{x+y}{b} = 420$.

8. Zauważmy, że $999999995904 = 10^{12} - 2^{12} = 2^{12}(5^{12} - 1)$
oraz $5^{12} - 1 = (5-1)(5+1)(5^2+1)(5^2-5+1)(5^2+5+1)(5^4-5^2+1)$

Tylko ostatni czynnik $(5^4 - 5^2 + 1) = 601$ jest liczbą trzycyfrową, dodatkowo jest on liczbą pierwszą, zatem szukanym dzielnikiem jest liczba 601.

9. X_n możemy znacząco uprościć: $X_n = \frac{4n+\sqrt{(4n^2-1)}}{\sqrt{2n-1+\sqrt{2n+1}}} = \frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})((\sqrt{2n+1})^2+\sqrt{2n+1}\sqrt{2n-1}+(\sqrt{2n-1})^2}{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}))} = \frac{1}{2}((\sqrt{2n+1})^3 - (\sqrt{2n-1})^3)$

Zatem licząc sumę otrzymamy: $Z_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{2022} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}^3 - \sqrt{1}^3 + \sqrt{5}^3 - \sqrt{3}^3 + \sqrt{7}^3 - \sqrt{5}^3 + \cdots + \sqrt{2045}^3 - \sqrt{2043}^3) = \frac{1}{2}(2045\sqrt{2045} - 1)$

W ostatnim równaniu po prostu zauważamy, że wyrazy zaczną się skracać.

10. Niech d oznacza długość jednego lotu, a r różnicę czasu między Europą a Wyspami Bergamuta wyrażoną w godzinach. Rozwiązujemy układ równań $d + r = 19.5$, $d - r = 8.5$ (wynika z różnic czasowych). Otrzymamy:

$d = 14$, $r = 5.5$ Zatem Kacper powróci o godzinie $22 : 30$ (bo $17 + 5.5 = 22.5$) czasu Wysp Bergamuta.