8. **Irańska Olimpiada Geometryczna**

Poziom średnio zaawansowany

5 listopada 2021

Zadanie 1. W trójkącie ABC mamy $AB = AC$. Niech H będzie ortocentrum tego trójkąta. Punkt E jest środkiem odcinka AC, zaś punkt D leży na boku BC tak, że $3CD = BC$. Udowodnić, że $BE \perp HD$.

Zadanie 2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB, CD zaznaczono punkty E, F odpowiednio, tak iż $\angle EDC = \angle FBC$ oraz $\angle ECD = \angle FAD$. Wykazać, że $AB \geqslant 2BC$.

Zadanie 3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ mamy $AB = BC$ oraz $\angle ABD = \angle BCD = 90°$. Oznaczmy przecięcie jego przekątnych przez E. Punkt F leży na boku AD tak, że $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$. Okrąg ω o średnicy DF przecina okrąg opisany na trójkącie ABF w punkcie $K \neq F$. Niech $L \neq F$ będzie przecięciem EF z ω. Udowodnić, że prosta KL przechodzi przez środek odcinka CE.

Zadanie 4. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego, zaś Γ okręgiem opisanym trójkąta różnobocznego ABC. Prosta AI przecina Γ w punkcie $M \neq A$. Niech N będzie środkiem BC, zaś T takim punktem na Γ, że $IN \perp MT$. Ponadto niech prosta prostopadła do AI przechodząca przez I przecina proste TB i TC w punktach odpowiednio P, Q. Wykazać, że $PB = CQ$.

Zadanie 5. Punkt X leży na boku CD pięciokąta wypukłego $ABCDE$. Wybierzmy na odcinku AX punkty K, L w taki sposób, że $AB = BK$ oraz $AE = EL$. Okręgi opisane na trójkątach CXK oraz DXL przecinają się w punktach X, Y. Udowodnić, że wszystkie proste XY, jakie dostaniemy dla różnych wyborów punktu X, będą przecinać się w jednym punkcie lub będą parami równoległe.

Czas trwania konkursu: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.