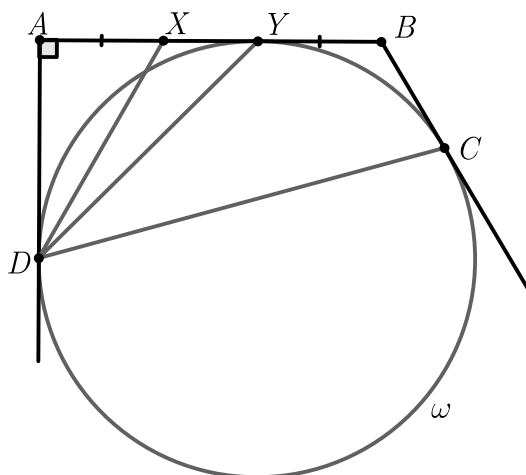




9. Irańska Olimpiada Geometryczna
Poziom średniozaawansowany
14 października 2022

Upublicznianie poniższych treści jest zabronione do momentu udostępnienia ich na oficjalnej stronie olimpiady: igo-official.com

Zadanie 1. Na rysunku poniżej zachodzi równość $AX = BY$. Wykazać, że $\angle XDA = \angle CDY$.



Zadanie 2. Dwa okręgi ω_1 i ω_2 o równych promieniach przecinają się w punktach E i X . Punkty C, D leżą na okręgach, odpowiednio, ω_1, ω_2 . Proste równoległe do prostych XC oraz XD , i przechodzące przez E , przecinają ω_2, ω_1 w punktach, odpowiednio, A, B . Załóżmy, że prosta CD przecina okręgi ω_1, ω_2 po raz drugi w punktach, odpowiednio, P, Q . Wykazać, że punkty A, B, P, Q leżą na jednym okręgu.

Zadanie 3. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkty M i N leżą na bokach, odpowiednio, AC i BC tego trójkąta. Punkty P i Q leżą po tej samej stronie prostej MN co punkt C , przy czym spełniony jest warunek $\triangle CMN \sim \triangle PAN \sim \triangle QMB$ (w dokładnie takiej kolejności odpowiadających sobie wierzchołków). Wykazać, że $OP = OQ$.

Zadanie 4.

Dwa wielokąty proste P, Q nazywamy *zgodnymi*, jeśli istnieje taka dodatnia liczba całkowita k , że możemy podzielić wielokąt P na k parami przystających wielokątów podobnych do Q , oraz możemy podzielić Q na k parami przystających wielokątów podobnych do P . Wykazać, że dla każdych dwóch parzystych liczb całkowitych $m, n \geq 4$, istnieją dwa zgodne wielokąty mające odpowiednio m i n boków.

Uwaga: Wielokąt prosty to wielokąt, którego żadne dwa boki się nie przecinają.

Zadanie 5. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg ω o środku w O . Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD . Niech Q będzie punktem leżącym na odcinku OP . Oznaczmy przez E i F rzuty prostokątne punktu Q na proste, odpowiednio, AD i BC . Punkty M i N leżą na okręgu opisanym na trójkącie QEF i spełniają warunki: $QM \parallel AC$ oraz $QN \parallel BD$. Wykazać, że proste ME i NF przecinają się na symetralnej odcinka CD .

Czas trwania konkursu: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.