9. **Irańska Olimpiada Geometryczna**

Poziom zaawansowany

14 października 2022

Upublicznianie poniższych treści jest zabronione do momentu udostępnienia ich na oficjalnej stronie olimpiady: igo-official.com

---

Zadanie 1. Punkty A, B, C, oraz D leżą na okręgu ω w ten sposób, że $AB = BC = CD$. Styczna do ω w punkcie C przecina styczną do ω w punkcie A oraz prostą AD w punktach K i L, odpowiednio. Okrąg ω przecina drugi raz okrąg opisany na trójkącie KLA w punkcie M. Wykazać, że $MA = ML$.

Zadanie 2. W ostrokątnym trójkącie ABC zachodzi $AB \neq AC$. Punkt D leży na prostej BC w ten sposób, że prosta AD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Niech E oraz F będą środkami okręgów opisanych na trójkątach ABD i ACD, odpowiednio, oraz niech M będzie środkiem odcinka EF. Udowodnić, że prosta styczna do okręgu opisanego na trójkącie AMD przechodząca przez punkt D jest również styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 3. W trójkącie ABC ($\angle A \neq 90°$) punkty O, H są odpowiednio środkiem okręgu opisanego oraz spodkiem wysokości z A. Niech M, N będą odpowiednio środkami odcinków BC, AH. Punkt D jest przecięciem prostych AO oraz BC, zaś H' jest odbiciem H względem M. Okrąg opisany na $OH'D$ przecina okrąg opisany na BOC w punkcie E różnym od O. Udowodnić, że proste NO i AE przecinają się na okręgu opisanym na trójkącie BOC.

Zadanie 4. Czworokąt $ABCD$ jest trapezem o podstawach AB i CD, którego przekątne przecinają się w P. Prosta przechodząca przez P równoległa do AB przecina AD i BC w punktach Q i R, odpowiednio. Dwusieczne zewnętrzne kątów DBA, DCA przecinają się w X. Niech S będzie rzutem X na prostą BC. Wykazać, że jeśli na czworokątach $ABPQ$, $CDPQ$ daje się opisać okrąg, to $PR = PS$.

Zadanie 5. Ostrokątny trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω o środku O. Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach AC, AB, w taki sposób że O leży na EF, zaś na czworokącie $BCEF$ daje się opisać okrąg. Niech R, S będą odpowiednio przecięciami prostej EF z krótszymi łukami AB, AC okręgu ω. Punkty K, L są odpowiednio odbiciem R względem C oraz odbiciem S względem B. Punkty P, Q leżą odpowiednio na prostych BS, RC w taki sposób, że proste PK, QL są prostopadłe do BC. Udowodnić, że okrąg o środku w P i promieniu PK jest styczny do okręgu opisanego na RCE wtedy i tylko wtedy gdy okrąg o środku Q i promieniu QL jest styczny do okręgu opisanego na trójkącie BFS.

Czas trwania konkursu: 4 godziny i 30 minut.
Za każde zadanie można uzyskać maksymalnie 8 punktów.