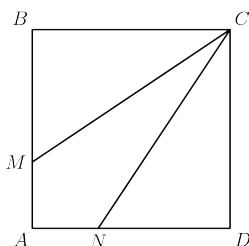
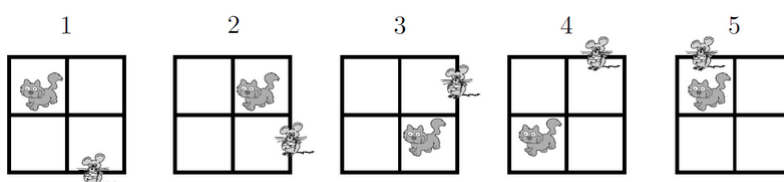


1. Ludwik dorysował po zewnętrznej stronie pięciokąta foremnego $ABCDE$ trójkąt równoboczny AFB oraz sześciokąt foremny $BJIHGC$. Jaka jest miara kąta $\sphericalangle FJI$?
2. W klasie jest 31 uczniów. Każdy z nich albo zawsze mówi prawdę, albo zawsze kłamie. Ustawili się oni w rzędzie i każdy z nich ocenił prawdopodobność jednego: pierwszy stwierdził, że drugi kłamie. Drugi stwierdził, że trzeci mówi prawdę. Trzeci stwierdził, że czwarty kłamie itd. Ostatni z nich stwierdził, że pierwszy jest kłamcą. Ilu uczniów kłamie, jeśli wiadomo, że jest to więcej niż połowa klasy?
3. Górnik Florian nosi ze sobą wagę szalkową. Zauważył, że 15 szmaragdów i 11 rubinów waży tyle samo, co 10 szmaragdów, 8 rubinów i 1 granat. Użył wagi jeszcze raz, co pozwoliło mu stwierdzić, że 21 szmaragdów, 7 rubinów i 8 granatów waży tyle samo, co 23 szmaragdy, 13 rubinów i 7 granatów. Na końcu Florian porównał za pomocą wagi jeden szmaragd i jeden rubin. Czy waga była w równowadze? Jeśli nie, który z kamieni był cięższy?
4. Sześciokąt $ABCDEFG$ ma wszystkie kąty równe. Znane są długości boków $|AB| = 13$, $|BC| = 15$, $|CD| = 17$. Ile wynosi suma
$$|CD| + |DE| + |EF|?$$
5. W dniu 1. stycznia 2006 roku wypadła niedziela. Jakim dniem tygodnia był 3. stycznia 2010 roku?
6. Na egzaminie z matematyki było 75 zadań: 10 z arytmetyki, 30 z algebry i 35 z geometrii. Pomimo tego, że Ania rozwiązała poprawnie 70% zadań z arytmetyki, 40% z algebry i 60% z geometrii, nie zdała egzaminu, bo rozwiązała mniej niż 60% zadań poprawnie. Ile zadań więcej musiałaby rozwiązać poprawnie aby zdać?
7. Kwadrat $ABCD$ ma boki długości 3. Odcinki CM i CN dzielą kwadrat na 3 kawałki o równym polu. Ile wynosi długość odcinka CM ?

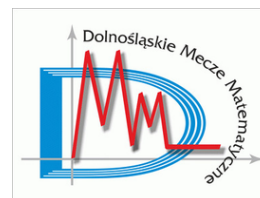


8. Na rysunku poniżej przedstawiono kilka pierwszych ruchów kota i myszy. Kot porusza się zgodnie z ruchem wskazówek zegara po wnętrzu kwadratu, a mysz przeciwnie do ruchu wskazówek zegara po ośmiu odcinkach na brzegu. W jakim miejscu będzie się znajdować kot i mysz po 1247 ruchach? Na rysunku oznaczonym 1 jest pokazana pozycja kota i myszy po 1-szym ruchu etc.



9. Zbysio ma 8 lat, a jego tato jest cztery razy od niego starszy. Za ile lat tato Zbysia będzie dwa razy mniej razy starszy od syna niż jest teraz?
10. Jakie cyfry kryją się pod literami?

$$\begin{array}{r} \text{K O T} \\ + \text{K T O} \\ \hline \text{T O K} \end{array}$$



1. Miary kątów wewnętrznych pięciokąta, trójkąta i sześciokąta foremnego wynoszą w stopniach: 108, 60, 120. Zatem

$$\sphericalangle FBJ = 72^\circ,$$

więc

$$\sphericalangle FJB = 54^\circ,$$

bo trójkąt FBJ jest równoramienny. Zatem

$$\sphericalangle FJI = 360^\circ - \sphericalangle FJB - \sphericalangle BJI = 186^\circ.$$

Uwaga. Zadania uważamy za rozwiązane w przypadku poprawnego i uzasadnionego wyznaczenia miary dowolnego z dopełniających kątów ograniczonych przez półproste JF i JI . Zatem poprawny wynik to 186° lub 174° .

2. Rozważamy przypadki: albo pierwszy kłamie, albo mówi prawdę.

Jeśli pierwszy uczeń kłamie, to drugi mówi prawdę, bo pierwszy twierdzi, że drugi kłamie. Zatem zgodnie z twierdzeniem drugiego trzeci mówi prawdę, więc czwarty kłamie, a ponieważ czwarty twierdził, że piąty mówi prawdę, to piąty kłamie.

Wzorzec *prawdomówny, prawdomówny, kłamca, kłamca* powtarza się potem, więc uczeń 29-ty kłamie, gdyż $29 = 1 + 4 \cdot 7$. Stąd wnioskujemy, że 30-ty mówi prawdę i 31-szy też. Ostatni uczeń twierdził, że pierwszy kłamie, więc nie ma sprzeczności. Jednakże, w tym przypadku 16 uczniów mówi prawdę i 15 kłamie, co jest sprzeczne z warunkami zadania.

Zatem pierwszy uczeń mówi prawdę. W tym przypadku mamy analogiczny do poprzedniego scenariusz, tyle że powtarzający się wzorzec (od drugiego ucznia!) to *kłamca, kłamca, prawdomówny, prawdomówny* i dwóch ostatnich uczniów kłamie, więc jest 16 kłamców i 15 prawdomównych.

3. Zauważmy, że jeśli z obu stron wagi zabierzemy tyle samo takich samych kamieni i była ona w równowadze, to dalej będzie w równowadze. W takim razie, zabierając z wagi za pierwszym razem 10 szmaragdów i 8 rubinów dowiadujemy się, że 5 szmaragdów i 3 rubiny ważą tyle, co jeden granat. Z drugiej strony, zabierając za drugim razem 21 szmaragdów, 7 rubinów i 7 granatów dowiadujemy się, że jeden granat waży tyle, co 2 szmaragdy i 6 rubinów. Porównując to z poprzednią informacją wnioskujemy, że zdjęcie trzech szmaragdów i dołożenie trzech rubinów nie zmienia łącznej wagi kamieni, więc szmaragdy i rubiny ważą po tyle samo.

4. Po przedłużeniu boków BC , DE i EF otrzymujemy trójkąt równoboczny. Zauważmy, że

$$|AB| + |BC| + |CD| = 45$$

to długość boku tego trójkąta, tak samo jak szukana suma. Zatem wynik to 45.

5. Jeżeli 1 stycznia pewnego roku jest poniedziałek, to 1 stycznia roku następnego jest wtorek jeżeli jest to rok nieprzestępny, a środa gdy jest to rok przestępny. (to znaczy zwiększamy dzień tygodnia o 1 bądź o 2, co wynika z reszt przy dzieleniu przez 7). Zauważmy, że rok 2008 był przestępny, a lata 2006, 2007 i 2009 nieprzestępne. Wobec tego musimy zwiększyć dzień tygodnia o $1 + 1 + 1 + 2 = 5$, więc 1. stycznia 2010 wypadł w piątek. Stąd, 3. stycznia 2010 był również niedzielą.

6. Ania rozwiązała $70\% \cdot 10 + 40\% \cdot 30 + 60\% \cdot 35 = 40$ zadań poprawnie. Aby zdać trzeba rozwiązać $60\% \cdot 75 = 45$ zadań. Zatem musiałyby rozwiązać poprawnie co najmniej 5 zadań więcej.
7. Pole kwadratu $ABCD$ jest równe $3 \cdot 3 = 9$. Zatem pole trójkąta MBC wynosi 3. Kąt MBC jest prosty zatem $3 = \frac{1}{2}|MB| \cdot |BC|$, co daje nam $|MB| = 2$. Więć z twierdzenia pitagorasa $|CM| = \sqrt{|MB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$
8. Kot i mysz wracają po ośmiu ruchach w to samo miejsce. Zatem po 1241 ruchach wrócą do pozycji oznaczonej numerem 1. Po wykonaniu dodatkowych 6 ruchów kot będzie się znajdował w prawym dolnym rogu, a mysz na dolnym odcinku lewej krawędzi.
9. Różnica wieku pomiędzy tatą Zbysia, a Zbysiem zawsze będzie wynosić 24 lata ($4 \cdot 8 - 8 = 24$). Tato ma być dwa razy starszy od syna, więc będzie tak, gdy Zbysio stanie się Zbigniewem i będzie miał lat 24, bowiem tato będzie wtedy miał 48 lat. Stanie się to za 16 lat ($24 - 8 = 16$).
10. Zauważmy, że dwie pierwsze kolumny od prawej, to to samo dodawanie $O + T$, jednak wyniki są różne, czyli musiało nastąpić przeniesienie. Wnioskujemy zatem, że $O = K + 1$. Więć pierwsza kolumna mówi nam, że $O + T = K + 10$, po wstawieniu poprzedniej informacji otrzymujemy $T = 9$. Skoro w pierwszej kolumnie wystąpiło przeniesienie, a w drugiej dodajemy te same cyfry, to również wystąpi. Wobec tego $2K + 1 = 9$, czyli $K = 4$. Jak od razu widać $O = 5$.