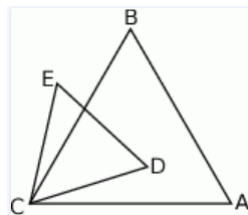
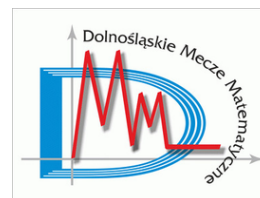


1. Rolnik Czesław w poniedziałek rano zabronował połowę swojego pola, a wieczorem zdążył jeszcze zabronować 4 ha. We wtorek zabronował $\frac{1}{3}$ pozostałej części pola. W środę Czesław skończył pracę, bronując ostatnie 8 ha. Jakiej wielkości pole posiada rolnik Czesław?
2. Oblicz wiek syna, taty i dziadka, jeżeli wiadomo, że połowa wieku taty równa się czwartej części sumy lat dziadka i syna. Ponadto 5 lat temu tato miał o 35 lat mniej niż syn z dziadkiem razem wzięci. Za 3 lata natomiast dziadek będzie miał o 7 lat więcej niż syn i tato razem.
3. Niech a będzie sumą sześciu kolejnych naturalnych potęg dwójki, z których pierwsza to 2^n . Ile dzielników ma liczba a ?
4. W 16 kg nasion znajduje się 10% zanieczyszczeń. Ile trzeba ich odjąć, by stanowiły tylko 4% całości?
5. W trapezie $ABCD$ podstawa AB ma długość 26, podstawa CD – 13, a ramię BC – 5. Miary kątów przy wierzchołkach A i B sumują się do 90° . Ile wynosi długość ramienia AD ?
6. Trójkąty równoboczne ABC i CDE są ułożone jak na rysunku poniżej. Udowodnij, że $AD = BE$.



7. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c , że każda z liczb $a \cdot b, b \cdot c, a \cdot c$ kończy się cyframi 26?
8. Pokaż, liczb 1, 2, ..., 9 nie da się podzielić na 3 grupy po trzy liczby w taki sposób, żeby w każdej grupie jedna z liczb była sumą dwóch pozostałych.
9. W trójkącie rozwartokątnym ABC bok AC jest dłuższy od obu pozostałych boków. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A . Udowodnij, że $|DC| - |DB| > |AC| - |AB|$.
10. Pewną liczbę naturalną podzielono z resztą przez 3, 18 i 48. Suma tych trzech reszt jest równa 39. Udowodnij, że reszta z dzielenia przez 3 tej liczby wynosi 1.



1. Niech p oznacza powierzchnię pola rolnika Czesława w hektarach. W poniedziałek Czesław zabronował $\frac{p}{2} + 4$, we wtorek $\frac{1}{3}(p - \frac{p}{2} - 4) = \frac{1}{3}(\frac{p}{2} - 4)$, natomiast w środę 8. Mamy zatem równanie

$$p = \frac{p}{2} + 4 + \frac{1}{3}(\frac{p}{2} - 4) + 8$$

$$6p = 3p + 24 + p - 8 + 48$$

$$p = 32$$

Zatem pole rolnika Czesława ma 32 ha powierzchni.

2. Niech s, t, d oznaczają odpowiednio wiek syna, taty, dziadka. Zapiszmy informacje pod postacią układu równań:

$$\begin{cases} \frac{t}{2} = \frac{1}{4}(d + s) \\ (t - 5) = (d - 5) + (s - 5) - 35 \\ (d + 3) = (t + 3) + (s + 3) + 7 \end{cases}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2}(d + s) \\ t = (d + s) - 40 \\ d - s = t + 10 \end{cases}$$

Z dwóch pierwszych równań otrzymujemy (po przyrównaniu i pomnożeniu przez 2) $2(d + s) - 80 = d + s$, a więc $d + s = 80$. Wstawiając to do drugiego równania otrzymujemy $t = 40$. Podstawiamy do trzeciego i mamy $d - s = 50$. Dodajemy do tego $d + s = 80$, a zatem $2d = 130$, czyli dziadek ma lat $d = 65$. Syn zatem ma $s = 15$ lat. Wiek panów to odpowiednio: 15, 40, 65

3. Możemy zapisać $a = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+4} + 2^{n+5} = 2^n(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 2^n \cdot 63$. Zatem w rozkładzie na czynniki pierwsze występuje dokładnie n dwójek, dwie trójki i jedna siódemka. Każdy dzielnik to iloczyn iluś dwójek, iluś trójek i siódemki lub nie. Wobec tego możemy nie wziąć żadnej dwójki, lub wziąć jedną, lub ..., lub wziąć n dwójek. Czyli mamy $(n + 1)$ opcji na wybór dwójek. Analogicznie mamy 3 opcje odnośnie trójki i dwie odnośnie siódemki. Zatem dzielników liczby a jest $6(n + 1)$.
4. Zauważmy, że zanieczyszczeń jest 1,6 kg całości. Odsiewając x kg zanieczyszczeń, z całej masy również odejmujemy x kg. Mamy zatem równanie

$$\frac{1,6 - x}{16 - x} = \frac{1}{25}$$

Mnożymy przez $25(16 - x)$ otrzymując $25 \cdot 1,6 - 25x = 16 - x$. Rozwiązując dalej mamy $24x = 25 \cdot 1,6 - 16 = 25 \cdot 1,6 - 10 \cdot 1,6 = 15 \cdot 1,6$. Czyli $8x = 5 \cdot 1,6$, a zatem $x = 5 \cdot 0,2 = 1$

5. Po przedłużeniu, ramiona AD i BC przetną się w punkcie E . Z warunku na kąty mamy, że trójkąt ABE jest prostokątny. Ponadto, ponieważ

$$|CD| = \frac{1}{2}|AB|,$$

to punkty C i D są środkami boków BE i AE . Zatem bok BE ma długość 10 i z tw. Pitagorasa obliczamy

$$|AD| = \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{2}\sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

6. Mamy

$$\sphericalangle ACD = 60^\circ - \sphericalangle CDB = \sphericalangle BCE.$$

Ponadto, $|AC| = |BC|$ oraz $|CD| = |CE|$. Zatem trójkąty ACD i BCE są przystające z cechy bok-kąt-bok, skąd teza.

7. Liczba, której ostatnie 2 cyfry to 26 jest podzielna przez 2 ale nie jest podzielna przez 4. Zatem w rozkładzie $ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2$ dwójka występuje w 3 potęgach co jest niemożliwe dla kwadratu.

Alternatywnie, można zauważyć, że gdyby takie trzy liczby istniały, to w każdej parze dokładnie jedna jest parzysta. Z tego wynika, że wśród a, b, c co najmniej dwie liczby są parzyste, ale to oznacza, że ich iloczyn dzieli się przez 4, więc nie może kończyć się na 26.

8. Załóżmy nie wprost, że taki podział istnieje. Niech $a < b < c$ będą liczbami z pewnej grupy. Wtedy $c = a + b$, zatem $a + b + c = 2c$ czyli suma liczb w każdej grupie jest parzysta. Dodając te 3 parzyste sumy do siebie otrzymujemy liczbę parzystą. Z drugiej strony ta suma jest równa sumie wszystkich liczb od 1 do 9, ale ta suma wynosi $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ co jest liczbą nieparzystą. Doszliśmy do sprzeczności, zatem taki podział nie istnieje.
9. Bok AC jest dłuższy od pozostałych, zatem kąt $\angle ABC$ jest rozwarty. Więc punkt D leży na przedłużeniu boku BC , a B leży między D a C na tej prostej. Z tego wynika, że $|BC| = |DC| - |DB|$. Dodatkowo z nierówności trójkąta wiemy, że $|BC| + |AB| > |AC|$, czyli $|BC| > |AC| - |AB|$. Po podstawieniu $|BC|$ za $|DC| - |DB|$ dostajemy tezę.
10. Oznaczmy naszą liczbę jako $n = 3a + r_1 = 18b + r_2 = 48c + r_3$. r_1 może być równe 0, 1 lub 2. Jeżeli $r_1 = 0$ to $r_2 + r_3 = 39$, ale wtedy $2n = 18b + 48c + 39$ lewa strona jest parzysta, a prawa nieparzysta, więc sprzeczność. Jeżeli $r_1 = 2$ to $r_2 + r_3 = 37$, ale wtedy $2n = 18b + 48c + 39$ lewa strona jest parzysta, a prawa nieparzysta i ponownie dochodzimy do sprzeczności. Zatem reszta z dzielenia n przez 3 musi być równa 1.

Alternatywne rozwiązanie. Ponieważ 18 i 48 to liczby parzyste, n ma taką samą parzystość jak reszta r_2 z dzielenia przez 18 oraz reszta r_3 z dzielenia przez 48. W szczególności r_2 i r_3 są tej samej parzystości, więc $r_2 + r_3$ jest parzyste. Jeśli r_1 oznacza resztę z dzielenia przez 3, to

$$r_1 = 39 - (r_2 + r_3),$$

więc r_1 jest nieparzyste. Ponieważ możliwe wartości r_1 to 0, 1, 2, to $r_1 = 1$.