Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz półfinałowy (licea)

1. Pewna funkcja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki

$$f(f(x,y),y) = x \quad \text{oraz} \quad f(y, f(y,x)) = x$$

dla wszystkich rzeczywistych x, y. Wykaż, że dla wszystkich x, y zachodzi także

$$f(x,y) = f(y,x).$$

2. Jaka jest najmniejsza liczba o dokładnie 7 dzielnikach większa od 100 000 000?

3. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4} \leq \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}.$$

4. Czy istnieją takie liczby naturalne k, l, m, n, że $k^{14} + l^{14} + m^{14} + n^{14} = 10^{10^{100}}$?

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC taki, że $AB \neq AC$. Niech E będzie punktem takim, że $|AE| = |BE|$ oraz odcinki BE i BC są prostopadłe. Podobnie niech F będzie punktem takim, że $|CF| = |AF|$ oraz odcinki CF i BC są prostopadłe. Niech punkt D będzie przecięciem prostej BC i prostej stycznej w punkcie A do okręgu opisanego na ABC. Wykaż, że punkty D, E, F są współliniowe.

6. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie

$$-2\sin x(1+4\sin^2 x+16\sin^4 x+\ldots)+(1+2\cdot(1-\cos 2x)+4\cdot(1-\cos 2x)^2+\ldots) = 1-2(\sqrt{2}-1)\sin x.$$

7. Czy dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej prawdziwa jest nierówność $x^x + x \geq 0{,}9$? Jeżeli tak, udowodnij; jeżeli nie, wskaż kontrprzykład i przeprowadź obliczenia na poparcie swojej tezy.

8. Dana jest liczba trzycyfrowa o następującej własności: $\overline{abc} = a^3 + b^3 + c^3$ (zapis $\overline{abc}$ oznacza, że a jest cyfrą setek, b – dziesiątek, a c – jedności). Wykaż, że żadna z cyfr a, b, c nie jest równa 8.

9. Udowodnij, że

$$\frac{kN}{N+M} = \sum_{j=0}^{k} \frac{j\binom{N}{j}\binom{M}{k-j}}{\binom{N+M}{k}}$$

dla dowolnych $N, M, k \in \mathbb{N}_+$.

10. Czy istnieje liczba wymierna, której n-ta cyfra po przecinku (w systemie dziesiętnym) jest równa reszcie z dzielenia liczby n^n przez 10 dla każdego n?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

Mecz półfinałowy – rozwiązania (licea)

1. **Sposób I** Rozważmy rodzinę funkcji jednej zmiennej $g_y(x) = f(x, y)$ dla $y \in \mathbb{R}$. Z warunków zadania wynika, że każda z funkcji g_y jest inwolucją, tzn. $g_y \circ g_y = \mathrm{id}$. Jest tak, ponieważ

$$f(f(x, y), y) = f(g_y(x), y) = g_y \circ g_y(x).$$

Stąd dla dowolnych $x, z \in \mathbb{R}$ zachodzi $g_y(x) = z \implies g_y(z) = x$, co z definicji rodziny g_y jest równoważne z tym, że $f(x, y) = z \implies f(z, y) = x$ (1).

Podobnie rozważając rodzinę $h_y(x) = f(y, x)$ dojdziemy do wniosku, że $f(y, x) = z \implies f(y, z) = x$ (2).

Warunek pierwszy w zadaniu: $f(f(x, y), y) = x \overset{(2)}{\implies} f(f(x, y), x) = y \overset{(1)}{\implies} f(y, x) = f(x, y)$.

Sposób II Zauważmy, że z pierwszego warunku po podstawieniu $y := f(x, y)$ mamy

$$f(f(x, f(x, y)), f(x, y)) = x.$$

Z drugiej strony rozważając wewnętrzne wyrażenie $f(x, f(x, y))$ i stosując dla niego warunek drugi otrzymamy

$$f(f(x, f(x, y)), f(x, y)) = f(y, f(x, y)) = x \tag{1}$$

Z dowolności wyboru x i y równość ta zachodzi dla dowolnych x, y. Zauważmy, że

$$f(y, x) \overset{(1)}{=} f(y, f(y, f(x, y))) \overset{(2)}{=} f(x, y)$$

2. Ze wzoru na liczbę dzielników wiemy, że liczba ma 7 dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci p^6. Stąd wystarczy znaleźć najmniejszą liczbę pierwszą, której szósta potęga przekracza 10^8. Łatwo widać, że $20^6 = 0.64 \cdot 10^8$ i potem wystarczy sprawdzić, że $23^6 > 10^8$ jest szukaną liczbą.

3. Nierówność jest jednorodna, więc możemy podzielić wszystkie zmienne przez $\sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4}$. Wówczas wszystkie x_i będą nie większe od 1 i oczywiście $x_i^4 \leq x_i^3$ i stąd

$$1 = x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 \leq x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3,$$

a więc również

$$\sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4} = 1 = \sqrt[3]{x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4} \leq \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3}.$$

4. Rozważmy reszty z dzielenia obu stron równania przez 29.

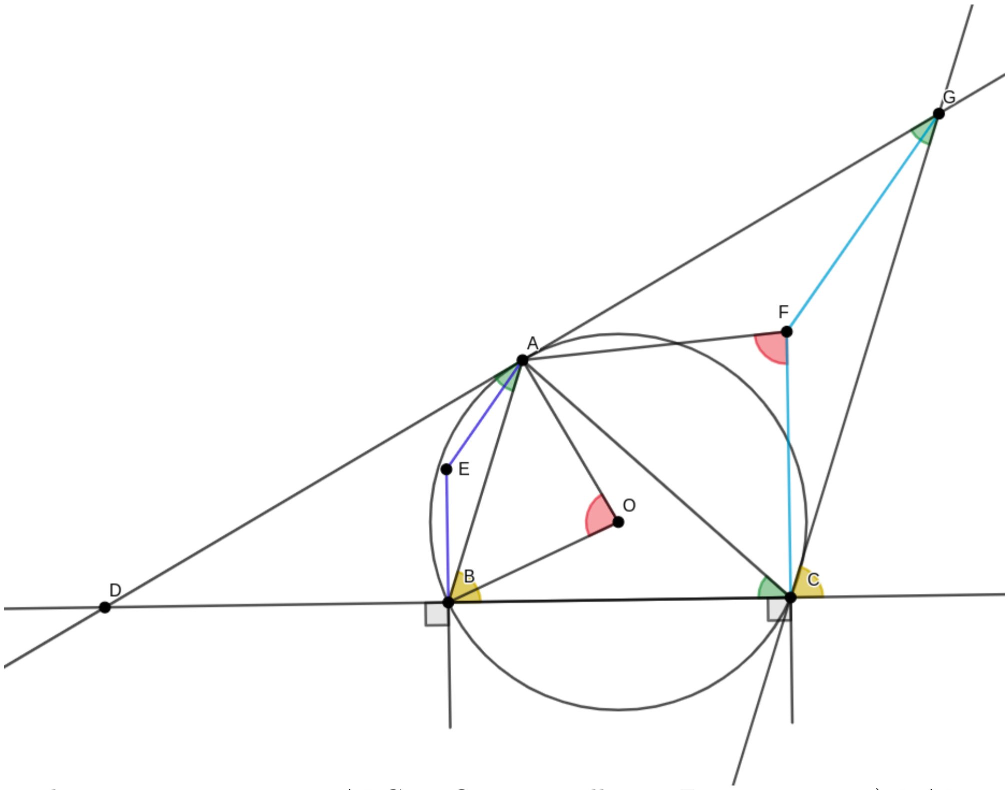
Łatwo sprawdzić, że czternasta potęga dowolnej liczby naturalnej daje resztę z dzielenia przez 29 równą $0, 1$ lub -1. Stąd jedyne możliwe reszty z dzielenia lewej strony równania to $-4, -3, \ldots, 3, 4$.

Korzystając z twierdzenia Eulera możemy obliczyć resztę z dzielenia przez 29 prawej strony równania. Mamy $\varphi(29) = 28$, $10^{100} \equiv 4 \pmod{28}$, a więc w konsekwencji

$$10^{10^{100}} \equiv 10^4 = 10000 \equiv 24 \pmod{29}.$$

Uzyskana reszta – 24 nie jest równa żadnej z reszt $-4, -3, \ldots, 3, 4$, a więc reszty z dzielenia obu stron równania przez 29 nigdy się nie zgodzą. Stąd równość nigdy nie zajdzie.

5.



Niech o będzie okręgiem opisanym na ABC, a O jego środkiem. Zauważmy, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCA$ (kąty wpisane i dopisane oparte na tym samym łuku o). Wynika stąd równość:

$$\sphericalangle BAO = 90^\circ - \sphericalangle DAB = 90^\circ - \sphericalangle BCA = \sphericalangle ACF.$$

Ponieważ trójkąty AOB i AFC są równoramienne o podstawach odpowiednio AB i AC, to otrzymujemy:

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AFC.$$

Teraz niech G będzie punktem na prostej AD takim, że GC i AB są równoległe. Wówczas:

$$\sphericalangle AGC = \sphericalangle DAB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \frac{1}{2}\sphericalangle AFC,$$

skąd F jest środkiem okręgu opisanego na AGC. Wynika stąd, że trójkąt CFG jest równoramienny. Ponieważ BEA również jest równoramienny oraz:

$$\sphericalangle EBA = \sphericalangle DBA - 90^\circ = \sphericalangle DCG - 90^\circ = \sphericalangle FCG,$$

to trójkąty BEA i CFG są podobne, skąd:

$$\frac{|GC|}{|AB|} = \frac{|FC|}{|EB|}.$$

Z drugiej strony z równoległości AB i GC oraz twierdzenia Talesa mamy:

$$\frac{|GC|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|DB|},$$

skąd:

$$\frac{|FC|}{|EB|} = \frac{|DC|}{|DB|}.$$

Ponieważ:

$$\sphericalangle DBE = \sphericalangle DCF = 90^\circ,$$

to trójkąty DBE i CDF są podobne, skąd:

$$\sphericalangle BDE = \sphericalangle CDF,$$

zatem D, E, F są współliniowe.

6. Zauważmy, że $1-\cos 2x = 1-(\cos^2 x-\sin^2 x) = (\cos^2 x+\sin^2 x)-(\cos^2 x-\sin^2 x) = 2\sin^2 x$. Wobec tego wyrażenie z treści zadania możemy przekształcić. Mamy

$$\begin{aligned}&-2\sin x(1+4\sin^2 x+16\sin^4 x+\ldots)+(1+2\,(1-\cos 2x)+4\,(1-\cos 2x)^2+\ldots)\\ &=-2\sin x(1+4\sin^2 x+16\sin^4 x+\ldots)+(1+4\sin^2 x+16\sin^4 x+\ldots).\end{aligned}$$

Jak można zauważyć powyższe wyrażenia mają sens tylko wtedy, gdy $\left|4\sin^2 x\right| < 1$, co jest równoważne $|\sin x| < \frac{1}{2}$, a zatem $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi\right)$. Przekształcając dalej mamy zatem:

$$\begin{aligned}&-2\sin x(1+4\sin^2 x+16\sin^4 x+\ldots)+(1+2\,(1-\cos 2x)+4\,(1-\cos 2x)^2+\ldots)\\ &=-2\sin x\sum_{k=0}^{\infty}2^{2k}\sin^{2k}x+\sum_{k=1}^{\infty}2^{2k}\sin^{2k}x.\end{aligned}$$

Ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{2k}\sin^{2k}x=\frac{1}{1-4\sin^2 x}$$

A zatem

$$\begin{aligned}-2\sin x\sum_{k=0}^{\infty}2^{2k}\sin^{2k}x+\sum_{k=1}^{\infty}2^{2k}\sin^{2k}x&=-\frac{2\sin x}{1-4\sin^2 x}+\frac{1}{1-4\sin^2 x}\\ &=\frac{1-2\sin x}{(1-2\sin x)\,(1+2\sin x)}=\frac{1}{1+2\sin x}\end{aligned}$$

Przyrównując uzyskane wyrażenie do prawej strony równości z treści zadania otrzymujemy

$$\frac{1}{1+2\sin x}=1-2(\sqrt{2}-1)\sin x$$

Równoważnie

$$1=\left(1-2(\sqrt{2}-1)\sin x\right)(1+2\sin x)\,.$$

$$0=\sin x\left(\sin x-\frac{4-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-4}\right)$$

Podstawiając $u := \sin x$ dostajemy:

$$0=u\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

zatem $u=0$ lub $u=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Podstawiając z powrotem $u=\sin x$ dostajemy $\sin x=0$ lub $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Wiemy, że pierwotne równanie miało sens tylko wtedy, gdy $|\sin x| < \frac{1}{2}$, zatem żaden x taki, że $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nie może być rozwiązaniem. Zbiór rozwiązań równania z zadania będzie zatem miał postać $\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$.

7. Nie. Wystarczy wziąć $x = 1/10$.

Poniżej znajduje się rozsądna ścieżka elementarnego uzyskania powyższego rozwiązania. Przy ocenie tego zadania należy wymagać jedynie podania dowolnego kontrprzykładu i obliczeń (szacowań) potwierdzających jego prawdziwość. Obliczenia powinny być wykonane bez wykorzystania kalkulatora.

Wyznaczmy pochodną funkcji $f(x)=x^x+x$. Mamy

$$(x^x+x)'=\left(e^{x\ln x}+x\right)'=(x\ln x)'\cdot e^{x\ln x}+1=(x\,(\ln x)'+(x)'\ln x)\cdot e^{x\ln x}+1=(1+\ln x)\cdot x^x+1.$$

Dla argumentów dążących do zera wartości pochodnej są nieograniczone z dołu, a dla $x = 1$ pochodna wynosi 2. Pochodna jest ciągła na przedziale $(0, 1]$, a więc z twierdzenia Darboux istnieje punkt w przedziale $(0, 1]$, w którym pochodna jest równa zero. Wyznaczmy rozsądnie krótki przedział zawierający taki punkt.

Rozważmy $a = e^{-3}$ i $b = e^{-2}$. Mamy

$$f'(a) = (1+\ln e^{-3})\cdot e^{-3e^{-3}}+1 = (1-3)\cdot e^{-3e^{-3}}+1 = -2e^{-3e^{-3}}+1 \leq -2e^{-1/9}+1 < -2\cdot\frac{1}{2}+1 = 0.$$

$$f'(b) = (1+\ln e^{-2})\cdot e^{-2e^{-2}}+1 = (1-2)\cdot e^{-2e^{-2}}+1 = -e^{-2e^{-2}}+1 \geq -e^{-1/2}+1 > -1+1 = 0.$$

Stąd miejsce zerowe pochodnej jest w przedziale (e^{-3}, e^{-2}).

Zgrubne wyznaczenie przebiegu zmienności funkcji $x^x + x$ pozwala domniemywać, że miejsce zerowe pochodnej w przedziale (e^{-3}, e^{-2}) odpowiada minimum tej funkcji.

W tym przedziale znajduje się liczba $1/10$. Wobec bliskości do minimum tej funkcji możemy domniemywać, że jeżeli nierówność z treści zadania jest fałszywa, to $1/10$ będzie odpowiednim świadkiem. Bezpośrednim rachunkiem pokazujemy, że

$$(1/10)^{1/10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{\sqrt[10]{10}} + \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt[10]{\frac{9765625}{1048576}}} + \frac{1}{10} = \frac{1}{\sqrt[10]{\frac{5^{10}}{4^{10}}}} + \frac{1}{10} = \frac{4}{5} + \frac{1}{10} = 0{,}9.$$

8. Pokażemy, że żadna z liczb nie może być równa 8. Rozpatrzmy 2 przypadki:

(a) $b = 8 \vee c = 8$

Wówczas $\overline{abc} > 8^3 = 512$, zatem $a \geq 5$. Zauważmy jednak, że $5^3 > 100, 6^3 > 200, 7^3 > 300, 8^3 > 400, 9^3 > 500$. Skoro $a \geq 5$, to mamy $100a+10b+c = \overline{abc} = a^3+(b^3+c^3) > 100(a-4)+512 > 100(a+1)$. W związku z tym $10b + c > 100$, co nie jest możliwe.

Zatem żadna z cyfr b, c nie może być równa 8.

(b) $a = 8$

Zauważmy, że nie może zajść sytuacja, w której b byłoby nieparzyste, a c parzyste. Wówczas $\overline{abc}$ jest parzyste, a $a^3 + b^3 + c^3$ nie. Stąd b musi być zawsze parzyste.

Dodatkowo zauważmy, że $b, c < 8$, ponieważ w przeciwnym razie $a^3 + b^3 + c^3 \geq 8^3 + 8^3 > 1000$. Zauważmy też, że $8^3 + b^3 + c^3 = 512 + b^3 + c^3 = \overline{8bc} \geq 800$, czyli $b^3 + c^3 \geq 288$. Zatem większa z liczb b, c musi być większa od 5. Do rozpatrzenia zostało już teraz niewiele możliwych par liczb b, c:

i. $b = 6, c \leq 4 : 8^3 + 6^3 + c^3 \leq 792 < \overline{86c}$

ii. $b = 6, c = 5 : 8^3 + 6^3 + 5^3 = 853 \neq 865$

iii. $b = 6, c \geq 6 : 8^3 + 6^3 + c^3 \geq 944 > \overline{8bc}$

iv. $b \leq 4, c = 6 : 8^3 + b^3 + 6^3 \leq 792 < \overline{8b6}$

v. $b = 4, c = 7 : 8^3 + 4^3 + 7^3 = 919 \neq 847$

vi. $b = 2, c = 7 : 8^3 + 2^3 + 7^3 = 863 \neq 827$

vii. $b = 0, c = 7 : 8^3 + 0^3 + 7^3 = 855 \neq 807$

Zatem żadna z liczb trzycyfrowych takich, że $\overline{abc} = a^3 + b^3 + c^3$ nie zawiera cyfry 8.

9. Przekształćmy równanie z tezy zadania:

$$\frac{kN}{N+M} = \sum_{j=0}^{k} \frac{j\binom{N}{j}\binom{M}{k-j}}{\binom{N+M}{k}} \iff \frac{kN}{N+M}\binom{N+M}{k} = \sum_{j=0}^{k} j\binom{N}{j}\binom{M}{k-j} \iff$$

$$\iff \binom{N+M-1}{k-1}N = \sum_{j=0}^{k} j\binom{N}{j}\binom{M}{k-j}$$

Ostatnia równość ma następującą interpretację kombinatoryczną: liczba sposobów na wybranie k-elementowego podzbioru sumy zbiorów N-elementowego i M-elementowego oraz wyróżnienie jednego z wybranych k elementów pochodzących ze zbioru N-elementowego (o ile taki istnieje). W lewej stronie równania najpierw wyróżniamy element, a następnie wybieramy pozostałe $k-1$ elementów. W prawej stronie wybieramy j elementów ze zbioru N-elementowego (mając j sposobów na wybranie wyróżnionego elementu), a następnie wybranie pozostałych $k-j$ elementów. To są te same obiekty kombinatoryczne, zatem równość zachodzi.

10. Taka liczba istnieje. Wystarczy sprawdzić, że ciąg $a_n = n^n \mod 10$ jest ciągiem cyklicznym o okresie równym $\mathrm{NWW}(10, \varphi(10)) = \mathrm{NWW}(10, 4) = 20$. Istotnie, z twierdzenia Eulera i arytmetyki modularnej wynika, że:

$$n^n \equiv n^{n \bmod \varphi(10)} \equiv (n \bmod 10)^{(n \bmod \varphi(10))} \pmod{10}.$$

Każde z powyższych przystawań można również wyprowadzić sprawdzając 4 i 10 przypadków reszt n z dzielenia przez odpowiednio $\varphi(10)$ i 10.