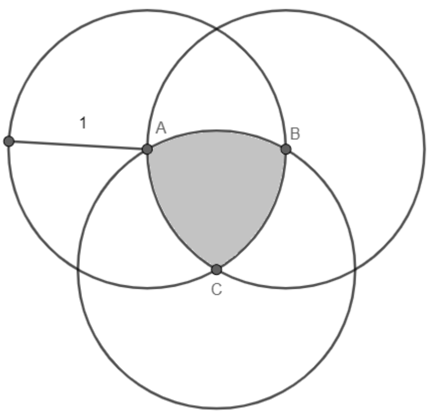
Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

PÓŁFINAŁ (SP 7-8)

1. Czy istnieją takie cyfry a, b, c i d, że $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 2022$? *Przypominamy, że* $\overline{abcd}$ *to kanoniczne oznaczenie na liczbę, której cyfrą tysięcy jest* a*, cyfrą setek jest* b *i tak dalej.*
2. Iloma zerami kończy się liczba $100! = 100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 1$?
3. Niech p, q będą sześciocyfrowymi liczbami pierwszymi różniącymi się o 2. Wykaż, że ich suma jest podzielna przez 12.
4. Kwadrat magiczny to taki, w którym sumy liczb w każdym wierszu, każdej kolumnie oraz na przekątnych są równe. Czy da się stworzyć kwadrat magiczny 3×3 z dziewięciu najmniejszych liczb pierwszych?
5. A: Mam trzech synów.
   B: Ile mają lat?
   A: Iloczyn ich wieku to 36 lat.
   B: To nie wystarczy, żebym odpowiedział.
   A: Gdy zsumuję ich wiek, otrzymam numer twojego domu.
   B: Wciąż mi to nie wystarcza.
   A: Mój najstarszy syn ma rude włosy.
   Teraz B bezbłędnie podał wiek synów. Ile lat ma każdy z nich?
6. Dysponujesz czterema puzzlami w kształcie trójkątów o bokach 3, 4 i 5 i chcesz skleić z nich jeden kształt o możliwie największym obwodzie. Jaki największy obwód można uzyskać? Uzasadnij i narysuj przykładową figurę realizującą ten obwód. *Uwaga, możesz kleić wyłącznie boki o tej samej długości. Co więcej, musisz użyć wszystkich puzzli.*
7. W trapezie równoramiennym o podstawach a i b, gdzie $a < b$, punkt przecięcia przekątnych dzieli każdą z nich na dwa odcinki, z których jeden jest dłuższy od drugiego o 1. Pokaż, że długość przekątnej to $\frac{a+b}{a-b}$.
8. Oblicz pole szarej figury przedstawionej na poniższym rysunku. Wszystkie okręgi na rysunku mają promień o długości 1.



9. W trzech urnach umieszczono po dwie kule: w jednej dwie białe, w drugiej dwie czarne, a w trzeciej jedną białą i jedną czarną. Na każdej z nich zawieszono kartkę opisującą zawartość urny. Napisy jednak pomieszały się i to w tak nieszczęśliwy sposób, że teraz żaden nie odpowiada prawdzie. Każda urna jest więc podpisana, ale fałszywie! Z której urny należy wylosować jedną kulę, aby po jej obejrzeniu móc odgadnąć, jakiego koloru jest druga kula w te urnie?
10. Jaka jest najmniejsza liczba o dokładnie 7 dzielnikach większa od $100\,000\,000$?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2021/22

PÓŁFINAŁ - rozwiązania (SP 7-8)

1. Nie, cyfry takie nie istnieją. Gdyby istniały, to

$$\begin{aligned} 2022 &= (1000a + 100b + 10c + d) - (1000d + 100c + 10b + a) \\ &= 1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + (d - a). \end{aligned}$$

Porównując liczby tysięcy po obu stronach równości otrzymujemy, że $a - d = 2$. Wtedy $d - a = -2$, czyli

$$100(b - c) + 10(c - b) - 2 = 22 \Leftrightarrow 100(b - c) + 10(c - b) = 24,$$

czyli $b - c = 0$. Wtedy $c - b = 0$, czyli $0 = 24$, co daje sprzeczność.

2. Rozważamy, ile piątek i dwójek znajduje się w rozkładzie liczby 100! na czynniki pierwsze. Mniejsza z tych liczb będzie poszukiwaną liczbą zer kończących liczbę 100!. Oczywiście dwójek w rozkładzie będzie o wiele więcej, wobec czego wystarczy policzyć piątki.

Co piąty czynnik w iloczynie jest podzielny przez pięć. Są to czynniki: 5, 10, 15, …, 95, 100. Czynników tych jest 20. Jednak cztery z nich są podzielne przez 25 (są to 25, 50, 75 i 100). Oznacza to, że wnoszą do rozkładu po dodatkowej piątce. Kończymy rozważania stwierdzeniem, że żadna z liczb od 1 do 100 nie jest podzielna przez 5^3.

Sumarycznie w rozkładzie znajdą się 24 piątki, wobec czego liczba 100! ma 24 zera na końcu.

Pominięcie liczb wnoszących do rozkładu więcej niż jedną piątkę skutkuje brakiem możliwości przyznania większej liczby punktów niż 5.

Za zbędne mnożenie liczby rozpatrywanych przypadków odejmujemy dwa punkty.

Za wyliczenie liczby dwójek (zamiast zauważenia, że wystarczy, że jest ich więcej niż piątek) odejmujemy jeden punkt.

3. Rozpatrzyć należy reszty z dzielenia liczb p, q przez 6. Nie mogą one być postaci $6k, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4$ (dla k całkowitego), gdyż wówczas miałyby nietrywialne dzielniki. Wobec tego mniejsza z nich ma resztę 5 modulo 6, a większa ma resztę 1. A zatem $p + q = (6k + 5) + (6(k + 1) + 1) = 12k + 12$.

4. Pierwsze 9 liczb pierwszych to $2, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 23$. W sumie dają 100. Sumy kolumn powinny być sobie równe, a ich trzykrotność być równa sumie wszystkich liczb znajdujących się w kwadracie magicznym. *Za wypisanie pierwszych dziewięciu liczb pierwszych przyznajemy 1 pkt.*

5. Możliwe iloczyny trzech liczb naturalnych równe 36 to: $2 \cdot 2 \cdot 9$, $9 \cdot 4 \cdot 1$, $6 \cdot 6 \cdot 1$, $3 \cdot 2 \cdot 6$, $4 \cdot 3 \cdot 3$, $2 \cdot 18 \cdot 1$.

Sumy tych czynników to odpowiednio: 13, 14, 13, 11, 10, 21.

Gdyby numer domu drugiego rozmówcy występował na liście jednokrotnie, mógłby on od razu podać szukany iloczyn. Skoro się tak nie stało, wiemy, że numer domu występuje więcej niż raz, a więc musi być równy 13. Wyklucza to wszystkie iloczyny oprócz dwóch: $2 \cdot 2 \cdot 9$, $6 \cdot 6 \cdot 1$.

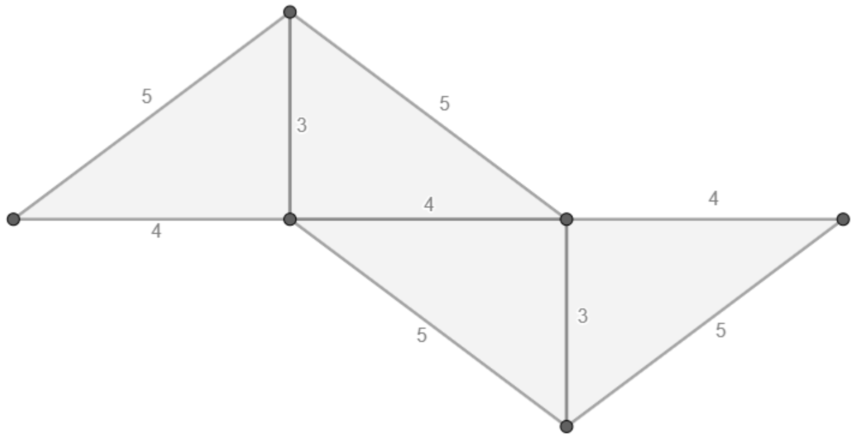
Na końcu korzystamy z informacji, że istnieje najstarszy syn, czyli największy numer. Odpowiedź wobec tego to: $2, 2, 9$.

6. Po pierwsze, zauważmy, że puzzle te są trójkątami prostokątnymi, co wynika z twierdzenia Pitagorasa. *(Za tę obserwację przyznajemy 1 pkt.)*

Zastanawiamy się, ile krawędzi maksymalnie może mieć otrzymana figura. Wszystkie trójkąty w sumie mają $4 \cdot 3 = 12$ krawędzi. Przy każdym doklejaniu nowego trójkąta zawsze co najmniej dwie krawędzie(na rysunku sklejone krawędzie oczywiście się nachodzą) znajdą się w środku otrzymywanej figury. Kleimy trzy trójkąty, więc maksymalna liczba krawędzi możliwa do otrzymania to $12 - 3 \cdot 2 = 6$. Wtedy dwa trójkąty będą miały po jednej krawędzi wewnątrz figury i dwa trójkąty po dwie krawędzie wewnątrz figury. Zatem największy obwód, jaki można otrzymać, wynosi

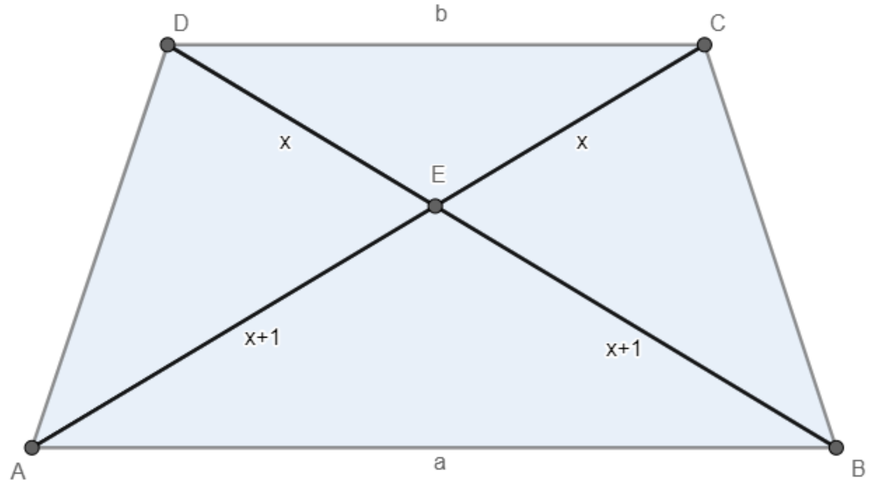
$$2 \cdot 5 + 2 \cdot (4 + 5) = 28.$$

Figura, która go realizuje, wygląda następująco:



Za poprawnie narysowaną figurę, ale brak uzasadnienia, że ma ona maksymalny obwód, przyznajemy maksymalnie 4 punkty.

7. Ponieważ $a < b$, to rysunek tej sytuacji wygląda następująco.



Należy teraz zauważyć podobieństwo trójkątów ABE i CDE. Zatem otrzymujemy

$$\frac{x}{x+1} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow ax = bx + b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a-b}.$$

Długość przekątnej według naszych oznaczeń wynosi $2x + 1$, czyli

$$2x + 1 = 2 \cdot \frac{b}{a-b} + 1 = \frac{a+b}{a-b}.$$

Za poprawny rysunek i uzasadnienie, który odcinek jest dłuższy przyznajemy 3 pkt.

8. Łączymy wierzchołki A, B i C i otrzymujemy podział szarej figury na trójkąt równoboczny o boku 1 oraz trzy przystające figury. Pole trójkąta wynosi $\frac{\sqrt{3}}{4}$, pola pozostałych figur można policzyć jako różnicę pola wycinka o kącie 60° koła o promieniu 1 i pola trójkąta równobocznego o boku 1. Stąd szukane pole wynosi

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9. Należy wylosować kulę z urny z napisem „czarna i biała". Jeśli wyciągniemy kulę białą, to druga też musi być biała. Jeśli wyciągniemy kulę czarną, to druga też musi być czarna.

10. Ze wzoru na liczbę dzielników wiemy, że liczba ma 7 dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci p^6. Stąd wystarczy znaleźć najmniejszą liczbę pierwszą, której szósta potęga przekracza 10^8. Łatwo widać, że $20^6 = 0.64 \cdot 10^8$ i potem wystarczy sprawdzić, że $23^6 > 10^8$ jest szukaną liczbą.