

1. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie o boku $4\sqrt{7}$ i cosinusie kąta naprzeciw $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.
2. Z wierzchołka A trójkąta $\triangle ABC$ poprowadzono półprostą przecinającą bok BC w punkcie D . Oblicz stosunek promieni okręgów opisanych na trójkątach $\triangle ABD$ i $\triangle ACD$.
3. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$. Na boku BC wyznaczono punkt D w odległości m od wierzchołka B . Wyznacz długość AD w zależności od długości boków trójkąta i m .
4. Udowodnij, że trójkąt o dwóch dwusiecznych jednakowej długości jest równoramienny.
5. Wykaż, że jeżeli α, β są kątami trójkąta, to $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$
6. Dany jest trójkąt o bokach 4, 5, 7. Czy jest on ostro- czy rozwartokątny?
7. W równoległoboku kąt ostry ma miarę 60° , a stosunek kwadratów długości przekątnych to 19:39. Oblicz stosunek długości boków.
8. Trzy cięciwy okręgu o promieniu R tworzą trójkąt o bokach $R/2, R\sqrt{3}$. Oblicz długość trzeciego boku.
9. Wewnątrz trójkąta $\triangle ABC$ leży taki punkt P , że

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \varphi$$

Dowieść, że

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}$$

10. Na trójkącie $\triangle ABC$ opisano okrąg. Znając promień R tego okręgu, obliczyć promień okręgu przechodzącego przez środki trzech okręgów dopisanych do $\triangle ABC$.
11. Dowieść, że pole czworokąta wpisanego w koło i mającego boki długości a, b, c, d opisuje się wzorem $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, gdzie $2p = a + b + c + d$. Co gdy na czworokącie również można opisać okrąg?

12. Punkty $A, B, C, D, \dots$ są kolejnymi wierzchołkami pewnego wielokąta foremnego, przy czym zachodzi związek

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

Ile boków ma ten wielokąt?

13. Wykres funkcji $f(x) = |x| - 5$, oraz prosta przechodząca przez $(-5, 0)$ i nachylona do osi OX pod kątem 15° , ograniczają trójkąt. Oblicz obwód, kąty i pole tego trójkąta.

-
14. Udowodnij, że $\cos 1^\circ$ jest liczbą niewymierną.

15. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ oraz $\sin \alpha > \cos \alpha$. Ile wynosi $\sin \alpha$?

16. Wykazać, że dla każdego kąta ostrego α , prawdziwa jest nierówność:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \geq 2$$

17. Wykazać dla dowolnego kąta równość

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

18. Znając wartość $\sin \alpha + \cos \alpha$, obliczyć $\sin \alpha \cos \alpha$, oraz $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$.

19. Dla kąta ostrego pokazać

$$(1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) = \cos \alpha$$

-
20. Dowieść, że jeżeli boki trójkąta spełniają $a < b < c$, to dwusieczne kątów przeciwległych spełniają $d_a > d_b > d_c$.

21. Udowodnij, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$