

Symulacja OMJ – zestaw poniedziałkowy

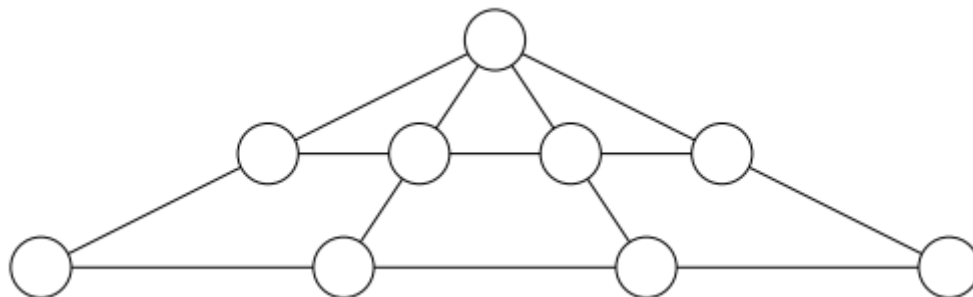
S1

11. Znajdź wszystkie trójki liczb naturalnych dodatnich $\langle a, b, c \rangle$, dla których:
 $NWD(a, 20) = b$, $NWD(b, 15) = c$, $NWD(a, c) = 5$.
12. Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym o podstawie AB i kącie przy podstawie większym od 60° . Oznaczamy środek okręgu opisanego i wpisanego odpowiednio przez O, W . Wreszcie niech D będzie punktem przecięcia okręgu przechodzącego przez punkty B, O, W z ramieniem BC . Wykaż, że odcinki AC oraz DW są równoległe.
13. Wykaż, że każda liczba naturalna kończąca się w zapisie dziesiętnym na 133 ma dzielnik pierwszy niejednocyfrowy.
14. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym. Oznaczmy ortocentrum przez H , a spodki wysokości poprowadzonych z A, B, C przez D, E, F . Punkt przecięcia DF oraz wysokości poprowadzonej z B oznaczmy przez P . Prosta prostopadła do BC przechodząca przez P przecina AB w punkcie Q . Prosta EQ przecina wysokość poprowadzoną z A w punkcie N . Wykaż, że N jest środkiem odcinka AH .
15. Adam na początku gry wybiera liczbę naturalną n , która nie jest kwadratem. Beata dodaje do niej liczbę $n + 1$. Adam do sumy dodaje $n + 2$. Beata do sumy dodaje liczbę $n + 3$, i tak dalej. Wygrywa ten, kto uzyska kwadrat. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb początkowych, dla których Adam wygrywa.

Symulacja OMJ – zestaw wtorkowy

21. Niech $x, y, z \in \mathbb{R}_+$ oraz $x + y + z = 3$. Wykaż, że co najmniej jedna z liczb: $x(x + y - z)$, $y(y + z - x)$, $z(z + x - y)$ nie przekracza 1.

22. Rozważamy następującą figurę:



. Chcemy w każde pole wpisać jedną liczbę od 1 do 9, żadnej nie powtarzając. Ponadto suma liczb na polach współliniowych musi być równa dla każdej linii. Ile istnieje sposobów na takie wpisanie tych liczb?

23. W pokoju jest n dzieci, z których każde ma pewną dodatnią liczbę cukierków. W rundzie o numerze k wszystkie dzieci, których liczba posiadanych cukierków jest względnie pierwsza z k , otrzymują jeden dodatkowy cukierek. Wykaż, że po pewnej liczbie rund dzieci będzie można podzielić na dwie grupy, w obrębie których każde dziecko ma tyle samo cukierków.

24. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, w którym $AC < AB$, a promień okręgu opisanego wynosi R . Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej na BC , a T niech będzie takim punktem na prostej AD , że $AT = 2R$ oraz D leży pomiędzy A i T . Wreszcie, niech S będzie środkiem łuku BC niezawierającego A . Wykaż, że kąt $\angle AST$ jest prosty.

25. Znajdź największą stałą C , dla której nierówność

$$(x_1 + \dots + x_6)^2 \geq C \cdot (x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + \dots + x_6(x_1 + x_2))$$

jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych.

Symulacja OMJ – zestaw środowy

- 31.** Niech $n \geq 3$. Na tablicy zapisujemy liczby naturalne od 1 do n . W każdym kroku wybieramy dwie i zastępujemy je ich średnią arytmetyczną. Postępujemy tak, aż na tablicy zostanie jedna liczba. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, którą można w ten sposób uzyskać?
- 32.** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB > AC$, a H jest punktem przecięcia wysokości. Punkt E jest odbiciem symetrycznym punktu C względem wysokości AH . Niech F będzie punktem przecięcia prostych EH i AC . Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie AEF leży na odcinku AB .
- 33.** Dla $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ wykaż, że $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}$.
- 34.** Niech W będzie środkiem okręgu wpisanego w okrąg ABC . Dany jest pewien okrąg przechodzący przez punkty A, B , który przecina odcinek AW w punktach A i P , odcinek BW w B, Q , odcinek AC w A, R oraz BC w B, S , przy czym żadne trzy z punktów A, B, P, Q, R, S nie są współliniowe, a także R leży we wnętrzu odcinka AC , a S we wnętrzu odcinka BC . Wykaż, że proste PS, QR, CW przecinają się w jednym punkcie.
- 35.** Niech liczby rzeczywiste $a, b, c \geq -1$ spełniają równość $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Wykaż, że $a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$.

Symulacja OMJ – zestaw czwartkowy

41. Niech a, b, c będą liczbami naturalnymi, dla których $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielne przez 18. Wykaż, że abc jest podzielne przez 6.
42. Niech $ABCDE$ będzie pięciokątem foremnym o środku w M . We wnętrzu odcinka DM obieramy punkt P . Okrąg opisany na ABP przecina odcinek AE w punktach A i Q , a prostą prostopadłą do CD przechodzącą przez P przecina w punktach P i R . Wykaż, że AR i QR mają równą długość.
43. Maks ma 2025 pustych słoików ponumerowanych od 1 do 2025. W n -tym ruchu wybiera słoik i wrzuca n monet do wszystkich słoików oprócz wybranego. Czy może w skończenie wielu ruchach dojść do sytuacji, w której liczba monet w każdym słoiku będzie taka sama?
44. Niech k będzie okręgiem o promieniu r , a AB cięciwą okręgu k , taką że $AB > r$. Ponadto niech S będzie punktem na cięciwie AB spełniającym $AS = r$. Symetralna odcinka BS przecina okrąg k w punktach C i D . Prosta przechodząca przez D i S przecina okrąg k po raz drugi w punkcie E . Wykaż, że trójkąt CSE jest równoboczny.
45. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $2017^a = b^6 - 32b + 1$.

**Olimpijska liga zadaniowa – zestaw poniedziałkowy**

- 101.** Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym o podstawie AB i kącie przy podstawie większym od 60° . Oznaczamy środek okręgu opisanego i wpisanego odpowiednio przez O, W . Wreszcie niech D będzie punktem przecięcia okręgu przechodzącego przez punkty B, O, W z ramieniem BC . Wykaż, że odcinki OD oraz WB są prostopadłe.
- 102.** Niech $x, y > 0$ oraz $xy = 4$. Wykaż, że $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$.
- 103.** Ania i Bartek otrzymali łańcuch z 2025 koralikami. W każdej turze jedna osoba przecina łańcuch, a druga wyrzuca jedną z uzyskanych części. Gracze grają na przemian, Ania zaczyna. Kto ma strategię wygrywającą, jeśli przegrywa osoba, która otrzyma łańcuch z dokładnie jednym koralikiem?

Olimpijska liga zadaniowa – zestaw wtorkowy

L2

- 201.** Dane są dwa okręgi styczne wewnętrznie, przy czym X jest punktem styczności. Niech P będzie dowolnym punktem płaszczyzny nieleżącym ani na żadnym okręgu, ani na prostej przechodzącej przez ich środki. Niech B_1, B_2 będą tymi punktami na poszczególnych okręgach, które leżą najbliżej punktu P , a D_1, D_2 tymi, które leżą najdalej. Wykaż, że $\sphericalangle B_1 X B_2 = \sphericalangle D_1 X D_2$.
- 202.** Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych dodatnich spełniające równanie $k^2 - 2016 = 3^n$.
- 203.** Z okazji XX OMJ na tablicy napisano liczby 2025 oraz 20. Dwoje graczy na przemian zapisuje na tablicy dodatnią różnicę dwóch wybranych przez siebie liczb znajdujących się już na tablicy, pod warunkiem, że tej różnicy na tablicy jeszcze nie zapisano. Przegrywa ten, kto nie może zapisać już żadnej liczby. Kto ma strategię wygrywającą?

Olimpijska liga zadaniowa – zestaw środowy

L3

- 301.** Niech ABC będzie trójkątem, w którym $AC > AB$, a O jest środkiem okręgu opisanego. Styczne do okręgu opisanego w punktach A, B przecinają się w punkcie T . Symetralna boku BC przecina bok AC w punkcie S . Wykaż, że punkty A, B, O, S, T są współokręgowe.
- 302.** Na okręgu rozmieszczono 2016 punktów. Wolno nam skakać o dwa lub trzy punkty, zawsze zegarowo. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba skoków, po której odwiedzimy wszystkie punkty i wrócimy do punktu startowego?
- 303.** Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Wykaż nierówność $(a + 2)(b + 2) \geq cd$.

Olimpijska liga zadaniowa – zestaw czwartkowy



- 401.** Niech $ABCDE$ będzie pięciokątem wypukłym o równych bokach. Kąty przy wierzchołkach C i D są proste. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD . Wykaż, że odcinki PA i PD są równej długości.
- 402.** Rozważmy układy liczb naturalnych od 1 do 64 na szachownicy, gdzie każde pole zawiera dokładnie jedną liczbę i żadna liczba się nie powtarza. Liczbę nazwiemy fantastyczną, jeśli jest największa w swoim rzędzie i najmniejsza w swojej kolumnie. Czy prawdą jest, że każde takie ułożenie liczb zawiera przynajmniej jedną liczbę fantastyczną?
- 403.** Czy prawdą jest, że każde takie ułożenie liczb zawiera maksymalnie jedną liczbę fantastyczną?

Mecz matematyczny



1. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $2xy + 3x + y = -1$.
2. Czy dla każdej dodatniej liczby naturalnej n istnieje wyraz ciągu Fibonacciego przez nią podzielny?
3. Czy dwie kolejne potęgi dwójki mogą mieć równą sumę cyfr? Uzasadnij odpowiedź.
4. Przy okrągłym stole ma usiąść 2023 matematyków. Każdy z nich ma dokładnie 1000 wrogów. Czy można tak usadzić matematyków przy stole, by żaden nie siedział bezpośrednio obok swojego wroga?
5. Wyznacz wszystkie pary liczb naturalnych m, n , dla których liczba $\sqrt{m} - \sqrt{n}$ jest wymierna.
6. Wyznacz wszystkie czwórki kolejnych liczb naturalnych, których iloczyn jest kwadratem.
7. Czy jakiś trójkąt rozwartokątny da się pokroić na skończenie wiele kawałków, z których każdy jest trójkątem ostrokątnym? Wyznacz wszystkie takie trójki liczb pierwszych, w których suma pierwszej z nich i kwadratu drugiej jest równa czwartej potęgze trzeciej z nich.
8. W sześciacie o wymiarach $8 \times 8 \times 8$ rozważmy trzy ściany o wspólnym wierzchołku. Ilu co najmniej pasków papieru o wymiarach 3×1 należy użyć, by okleić powierzchnię tych ścian? Oklejamy wyłącznie zewnętrzną stronę powierzchni.
9. Funkcja f o dziedzinie rzeczywistej spełnia dla wszystkich a, b nierówność $|f(a) - f(b)| \geq |a - b|$. Wykaż, że jeśli $f(f(f(0))) = 0$, to $f(0) = 0$.
10. Wykaż, że nie istnieją liczby wymierne x, y, z spełniające jednocześnie równania $x + y + z = 0$ oraz $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.