Permutacje ciągów

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$a^{c+d} + b^{c+d} \geqslant a^c b^d + a^d b^c.$$

2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzą nierówności

$$a + b + c \leqslant \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}$$

$$\frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} + \frac{2}{a+b} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$$

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

3. Niech a, b, c będą trzema takimi liczbami dodatnimi, że $ab + bc + ac = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \geqslant \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$$

4. Udowodnić, że dla dowolnego ciągu parami różnych liczb naturalnych $a_1, a_2, ..., a_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b i c zachodzi nierówność

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

6. Niech p będzie połową obwodu trójkąta ostrokątnego ABC o bokach długości a, b, c, które leżą odpowiednio naprzeciw kątów α, β, γ. Udowodnić, że prawdziwe są nierówności

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{\sin\gamma}{\gamma}\right) \leqslant \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right)\sin\beta + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\sin\gamma$$

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma \leqslant p$$

7. Udowodnić następującą **nierówność Czebyszewa**: Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych $a_1, a_2, ..., a_n$ są ciągami jednakowo uporządkowanymi, to zachodzi nierówność

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n),$$

natomiast jeżeli są ciągami przeciwnie uporządkowanymi, to zachodzi nierówność

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \leqslant (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n),$$

8. Udowodnić, że dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leqslant 2(\sin^{2n+2}\alpha + \cos^{2n+2}\alpha)$$

9. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c i d takich, że $a \geqslant c$ i $b \geqslant d$ zachodzi nierówność

$$(a + b + c + d)^2 \geqslant 8(ad + bc)$$

10. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ zachodzą nierówności

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$$

11. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ oraz $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + ... + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$$

12. Udowodnić uogólnienie wcześniejszego twierdzenia Czebyszewa: Niech $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ dla $i = 1, 2, ..., m$ ($m \geqslant 2$) będą ciągami liczb nieujemnych. Jeżeli ciągi te są parami jednakowo uporządkowane, to zachodzi nierówność

$$n^{m-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{m} a_{ij} \right) \geqslant \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right).$$

13. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$, oraz liczby naturalnej m prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1^m}{S-a_1} + \frac{a_2^m}{S-a_2} + ... + \frac{a_n^m}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1} \left(\frac{S}{n} \right)^{m-1}$$

14. Niech $a_1, a_2, ..., a_n$ będą takimi liczbami dodatnimi, że $a_1 a_2 \cdot ... a_n = 1$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $k > l > 0$ zachodzi nierówność

$$a_1^k + a_2^k + ... + a_n^k \geqslant a_1^l + a_2^l + ... + a_n^l.$$

---

15. Niech $a, b, c > 0$ oraz $abc = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

16. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

17. Liczby dodatnie $a_1, a_2, ..., a_n$ spełniają warunek $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

18. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie to

$$a + b + c \leqslant \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}$$

19. Przy pomocy twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych (wariantu dla dwóch ciągów) udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n}$$