ZADANIA NA DOWODZENIE
GEOMETRIA, cz. II
Wojciech Guzicki

W arkuszach maturalnych w ostatnich dwóch latach znalazły się zadania geometryczne na dowodzenie. Za poprawne rozwiązanie takiego zadania w arkuszu podstawowym zdający mógł otrzymać 2 pkt, w arkuszu rozszerzonym 4 pkt lub 3 pkt. Przy wystawianiu oceny za rozwiązanie zadania na dowodzenie kierowano się zasadą, że dowód matematyczny powinien być kompletny i tylko w wyjątkowych sytuacjach można uznać, iż zdający „pokonał zasadnicze trudności zadania”, mimo że nie doprowadził rozwiązania do końca.

W tym opracowaniu, będącym kontynuacją pierwszej części, pokazuję 22 kolejne zadania geometryczne na dowodzenie, w większości o podobnym stopniu trudności jak zadania ze wspomnianych wyżej arkuszy. Przyjmuję natomiast, że za poprawne rozwiązanie każdego z tych zadań przyznaje się 2 lub 3 pkt (3 pkt w przypadku zadań z arkusza rozszerzonego). Kwestia, za jakie rozwiązanie częściowe można przyznać 1 pkt (lub 2 pkt w przypadku zadania za 3 pkt), jest w każdym przypadku sprawą dyskusyjną.

W pierwszej części pokazałem trzy typy zadań na dowodzenie. Pierwszy polegał na tzw. „rachunku kątów”. Drugi typ zadań to proste nierówności geometryczne, w dowodzie których wykorzystuje się tzw. nierówność trójkąta. Wreszcie trzeci typ zadań to zadania, w których korzysta się z przystawania trójkątów. W tej części pokazuję zadania, w których korzystamy z twierdzenia Pitagorasa oraz z podstawowych twierdzeń dotyczących geometrii okręgu. Chcę tu zwrócić uwagę na to, że niektóre zadania zostały sformułowane jako zadania na dowodzenie, chociaż główna część dowodu to po prostu obliczenie (np. wykorzystujące twierdzenie Pitagorasa). Chciałem w ten sposób uwidocznić, że niektóre zadania obliczeniowe są w istocie zadaniami, w których konieczne jest przeprowadzenie rozumowania, a obliczenie jest tylko jego częścią. Główna część rozwiązania może polegać na ułożeniu równania; rozwiązanie tego równania jest już sprawą rutynową. Ułożenie równania czasem wymaga rozumowania na tyle nietrywialnego, że kwalifikuje zadanie nie jako zadanie ze standardu „modelowanie” czy „strategia”, ale jako zadanie na rozumowanie, wnioskowanie.

We wszystkich przedstawionych dowodach korzystamy z następujących twierdzeń geometrycznych, które powinny być dobrze znane każdemu maturzyście:

1. Twierdzenie Pitagorasa.
2. Twierdzenie o kątach środkowych i wpisanych.
3. Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą.
4. Twierdzenie o równości odcinków stycznych.
5. Warunki konieczne i wystarczające na to, by czworokąt można było wpisać w okrąg lub opisać na okręgu.
6. Twierdzenie o współliniowości środków okręgów i punktu styczności.

ZADANIA

1. Twierdzenie Pitagorasa

1. Dany jest prostokąt $ABCD$ i dowolny punkt P położony wewnątrz tego prostokąta. Udowodnij, że $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

2. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle C = 90°$. W tym trójkącie poprowadzono środkowe AD i BE. Udowodnij, że $4 \cdot (AD^2 + BE^2) = 5 \cdot AB^2$.

3. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe. Udowodnij, że $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

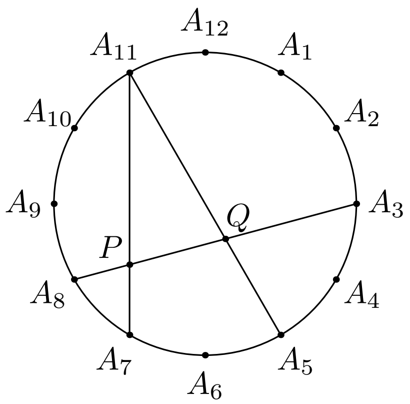
2. Geometria okręgu

4. Dany jest okrąg o środku O i promieniu r. Cięciwę AB tego okręgu przedłużono poza punkt B do punktu C takiego, że $BC = r$. Półprosta CO przecina okrąg w dwóch punktach D i E; punkt D leży na zewnątrz odcinka CO, punkt E leży wewnątrz tego odcinka. Udowodnij, że $\measuredangle AOD = 3 \cdot \measuredangle ACD$.

5. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Odcinki AC i AD są średnicami tych okręgów. Udowodnij, że punkty C, B i D są współliniowe.

6. Dane są dwa okręgi: odcinek AB jest średnicą pierwszego, punkt B jest środkiem drugiego. Prosta przechodząca przez punkt A przecina pierwszy okrąg w punkcie K różnym od A i przecina drugi okrąg w punktach M i N. Udowodnij, że $KM = KN$.

7. Punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ dzielą okrąg na 12 równych łuków, tak jak na rysunku:



Cięciwa A_8A_3 przecina cięciwy $A_{11}A_7$ i $A_{11}A_5$ odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że trójkąt PQA_{11} jest równoramienny.

8. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg. Punkt D leży na krótszym łuku AB. Punkt E leży na odcinku CD oraz $DE = DB$. Udowodnij, że trójkąty BAD i BCE są przystające.

9. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$ i $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$.

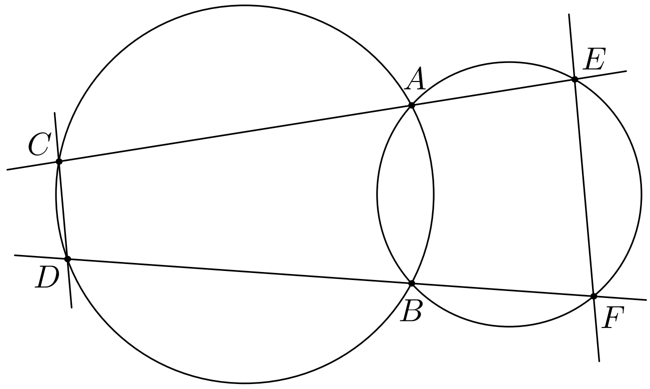
10. Punkt E leży na boku BC kwadratu $ABCD$. Kwadrat $BEFG$ leży na zewnątrz kwadratu $ABCD$. Okręgi opisane na tych kwadratach przecinają się w punktach B i H. Udowodnij, że punkty D, H i F są współliniowe.

11. Trójkąty równoboczne ABC i BDE są położone tak, że punkt B leży wewnątrz odcinka AD oraz wierzchołki C i E leżą po tej samej stronie prostej AD. Okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w punktach B i F. Udowodnij, że punkty C, F i D są współliniowe.

12. Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, na zewnątrz trójkąta, dwa trójkąty równoboczne ACD i BCE. Okręgi opisane na tych trójkątach równobocznych przecinają się w punktach C i F. Udowodnij, że punkty A, F i E są współliniowe.

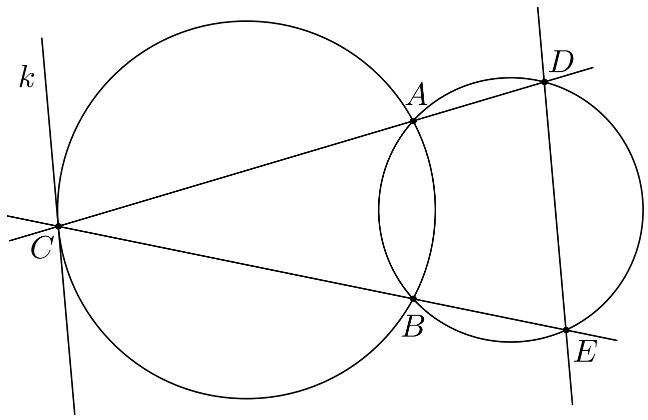
13. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F. Okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF przecinają się w punktach F i G. Udowodnij, że $\angle DGE = \angle BAC + \angle ABC$.

14. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina te okręgi w punktach C i E różnych od A; prosta przechodząca przez punkt B przecina te okręgi w punktach D i F różnych od B (zob. rysunek).



Udowodnij, że proste CD i EF są równoległe.

15. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Proste przechodzące przez punkty A i B przecinają jeden z tych okręgów w punkcie C różnym od A i B oraz przecinają drugi okrąg odpowiednio w punktach D i E różnych od A i B. Prosta k jest styczna do pierwszego okręgu w punkcie C (zob. rysunek).

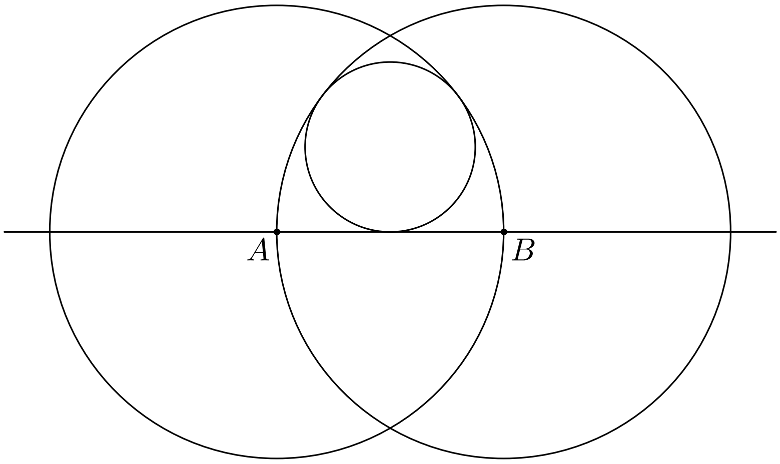


Udowodnij, że prosta k jest równoległa do prostej DE.

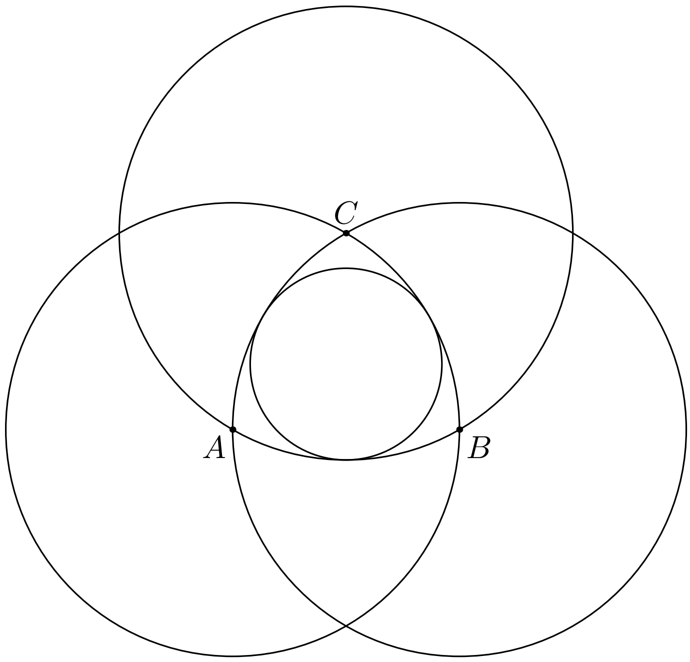
16. W czworokącie wypukłym $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne zewnętrznie. Udowodnij, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

3. Okręgi styczne

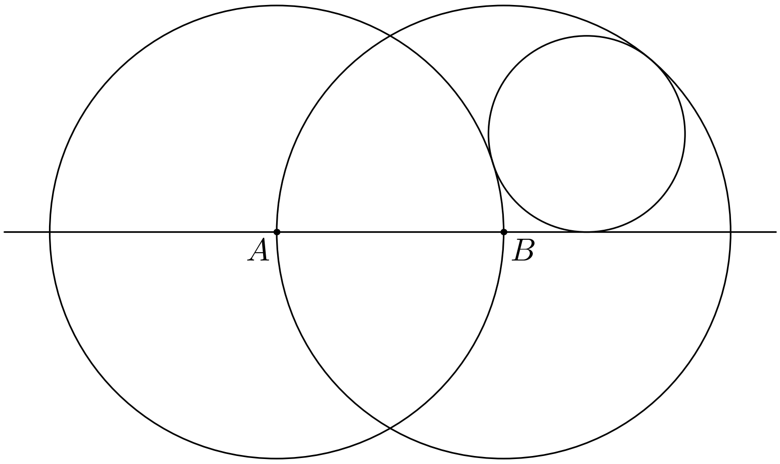
17. Dany jest odcinek AB o długości 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB oraz styczny wewnętrznie do obu okręgów o środkach A i B (zob. rysunek), ma promień równy $\frac{3}{4}$.



18. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 2. Punkty A, B i C są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg zawarty wewnątrz tych trzech okręgów, styczny wewnętrznie do nich (zob. rysunek), ma promień równy $\frac{2}{3}(3-\sqrt{3})$.



19. Dany jest odcinek AB o długości 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB, styczny zewnętrznie do okręgu o środku A oraz styczny wewnętrznie do okręgu o środku B (zob. rysunek), ma promień równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



4. Twierdzenie Pitagorasa i okręgi

20. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Jeden kąt tego czworokąta jest prosty. Udowodnij, że jeszcze co najmniej jeden kąt jest prosty oraz $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2$.

21. W okręgu o środku O i promieniu r poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy o długościach $2a$ i $2b$ przecinające się w punkcie P. Udowodnij, że $OP^2 + a^2 + b^2 = 2r^2$.

22. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Przekątne tego czworokąta są prostopadłe. Udowodnij, że

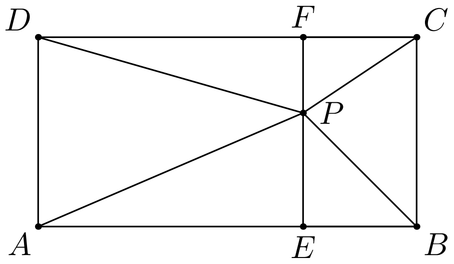
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

1. Twierdzenie Pitagorasa

1. Dany jest prostokąt $ABCD$ i dowolny punkt P położony wewnątrz tego prostokąta. Udowodnij, że $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

Rozwiązanie. Niech E i F będą rzutami punktu P na boki AB i CD prostokąta.



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$AP^2 + CP^2 = AE^2 + EP^2 + CF^2 + FP^2$$

oraz

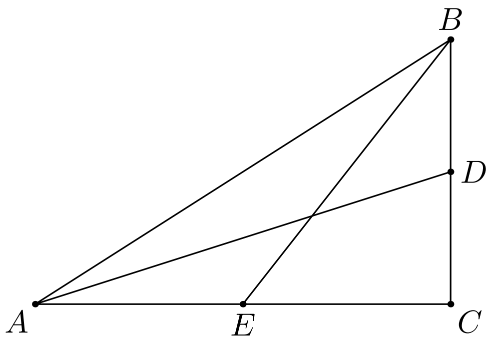
$$BP^2 + DP^2 = BE^2 + EP^2 + DF^2 + FP^2.$$

Ponieważ $AE = DF$ i $BE = CF$, więc $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

Uwaga. Twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego punktu P (położonego niekoniecznie na tej samej płaszczyźnie co prostokąt $ABCD$).

2. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\measuredangle C = 90°$. W tym trójkącie poprowadzono środkowe AD i BE. Udowodnij, że $4 \cdot (AD^2 + BE^2) = 5 \cdot AB^2$.

Rozwiązanie. Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ACD i BCE.

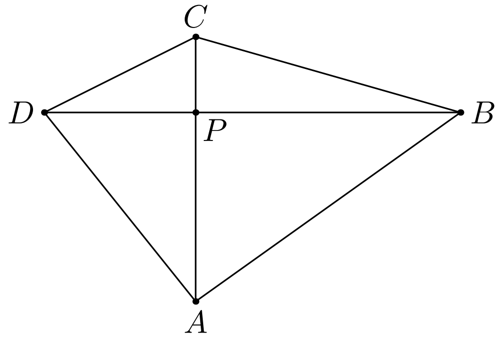


Mamy wówczas $AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot BC\right)^2 = AC^2 + \frac{1}{4} \cdot BC^2$, czyli $4 \cdot AD^2 = 4 \cdot AC^2 + BC^2$. Podobnie dowodzimy, że $4 \cdot BE^2 = AC^2 + 4 \cdot BC^2$. Dodając stronami dwie ostatnie równości dostajemy:

$$4 \cdot (AD^2 + BE^2) = 5 \cdot (AC^2 + BC^2) = 5 \cdot AB^2.$$

3. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe. Udowodnij, że $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Rozwiązanie. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$.



Mamy wówczas

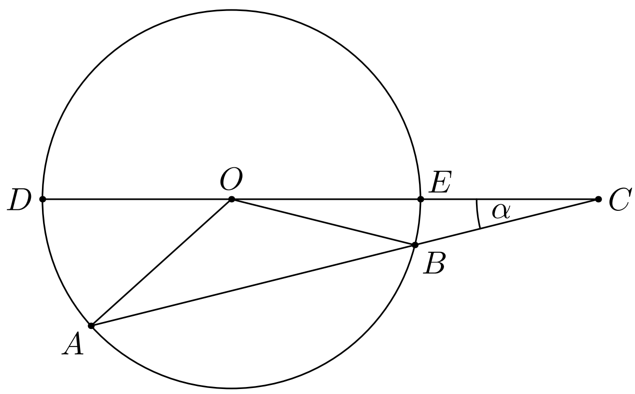
$$AB^2 + CD^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AP^2 + DP^2 + BP^2 + CP^2 = AD^2 + BC^2.$$

Uwaga. Warunek $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ były prostopadłe.

2. Geometria okręgu

4. Dany jest okrąg o środku O i promieniu r. Cięciwę AB tego okręgu przedłużono poza punkt B do punktu C takiego, że $BC = r$. Półprosta CO przecina okrąg w dwóch punktach D i E; punkt D leży na zewnątrz odcinka CO, punkt E leży wewnątrz tego odcinka. Udowodnij, że $\measuredangle AOD = 3 \cdot \measuredangle ACD$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $\alpha = \measuredangle ACD$. Ponieważ $BC = r = OB$, więc $\measuredangle BOC = \alpha$.



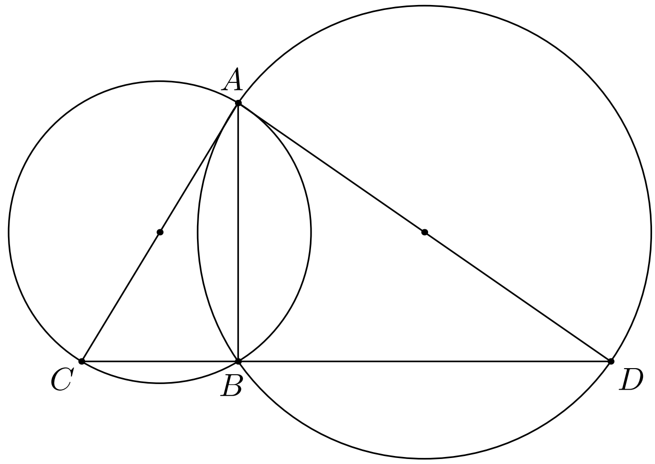
Kąt ABO jest kątem zewnętrznym trójkąta COB, więc $\measuredangle ABO = 2\alpha$. Trójkąt ABO jest równoramienny, więc $\measuredangle BAO = 2\alpha$ i stąd $\measuredangle AOB = 180^\circ - 4\alpha$. Zatem

$$\measuredangle AOD = 180^\circ - \measuredangle AOB - \measuredangle BOC = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha,$$

czyli $\measuredangle AOD = 3 \cdot \measuredangle ACD$.

5. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Odcinki AC i AD są średnicami tych okręgów. Udowodnij, że punkty C, B i D są współliniowe.

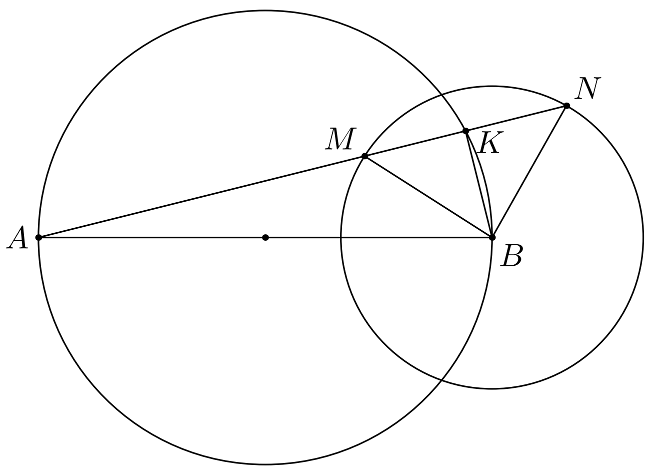
Rozwiązanie. Poprowadźmy odcinek AB.



Ponieważ AC jest średnicą jednego z danych okręgów, więc $\measuredangle ABC = 90°$. Podobnie AD jest średnicą drugiego okręgu, a więc $\measuredangle ABD = 90°$. Stąd wynika, że $\measuredangle CBD = 180°$, czyli punkty C, B i D są współliniowe.

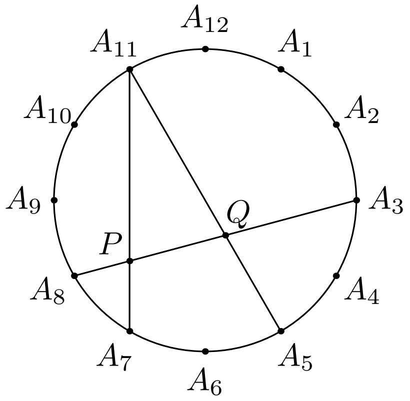
6. Dane są dwa okręgi: odcinek AB jest średnicą pierwszego, punkt B jest środkiem drugiego. Prosta przechodząca przez punkt A przecina pierwszy okrąg w punkcie K różnym od A i przecina drugi okrąg w punktach M i N. Udowodnij, że $KM = KN$.

Rozwiązanie. Ponieważ punkt K leży na okręgu o średnicy AB, więc $\measuredangle AKB = 90°$.



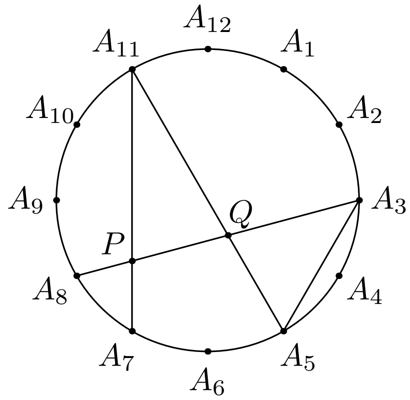
Punkt K jest więc rzutem punktu B na prostą MN. Ponieważ punkty M i N leżą na okręgu o środku B, więc punkt B leży na symetralnej odcinka MN; tą symetralną jest zatem prosta BK. Stąd wynika, że $KM = KN$.

7. Punkty $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ dzielą okrąg na 12 równych łuków, tak jak na rysunku:



Cięciwa A_8A_3 przecina cięciwy $A_{11}A_7$ i $A_{11}A_5$ odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że trójkąt PQA_{11} jest równoramienny.

Rozwiązanie. Najpierw zauważamy, że $\measuredangle PA_{11}Q = \measuredangle A_7A_{11}A_5 = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$. Dorysujmy teraz cięciwę A_3A_5.



Mamy wówczas

$$\measuredangle QA_3A_5 = \measuredangle A_8A_3A_5 = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ \quad \text{oraz} \quad \measuredangle QA_5A_3 = \measuredangle A_{11}A_5A_3 = 4 \cdot 15^\circ = 60^\circ.$$

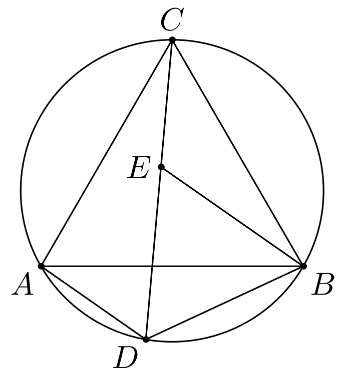
Możemy teraz obliczyć miarę trzeciego kąta trójkąta QA_5A_3:

$$\measuredangle A_5QA_3 = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ.$$

Stąd dostajemy $\measuredangle PQA_{11} = 75^\circ$ oraz $\measuredangle QPA_{11} = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$. Ponieważ $\measuredangle PQA_{11} = \measuredangle QPA_{11}$, więc $PA_{11} = QA_{11}$.

8. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg. Punkt D leży na krótszym łuku AB. Punkt E leży na odcinku CD oraz $DE = DB$. Udowodnij, że trójkąty BAD i BCE są przystające.

Rozwiązanie. Na cięciwie DC rysujemy taki punkt E, by $DE = DB$.

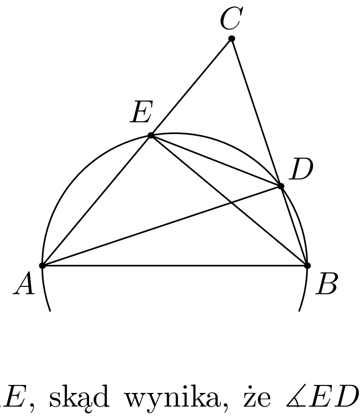


Ponieważ $\measuredangle CDB = \measuredangle CAB = 60^\circ$ oraz $DE = DB$, więc trójkąt DBE jest równoboczny. Zatem $BD = BE$. Ponieważ $BA = BC$ oraz $\measuredangle DBA = 60^\circ - \measuredangle ABE = \measuredangle EBC$, więc trójkąty BAD i BCE są przystające (cecha BKB).

Uwaga. Z przystawania trójkątów BAD i BCE wynika w szczególności, że $DA = EC$. Zatem $DC = DE + EC = DB + DA$. Udowodniliśmy zatem twierdzenie mówiące, że jeśli trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg oraz punkt D leży na krótszym łuku AB, to $AD + BD = CD$. Tak sformułowane zadanie było zadaniem olimpijskim.

9. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Udowodnij, że $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$ i $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$.

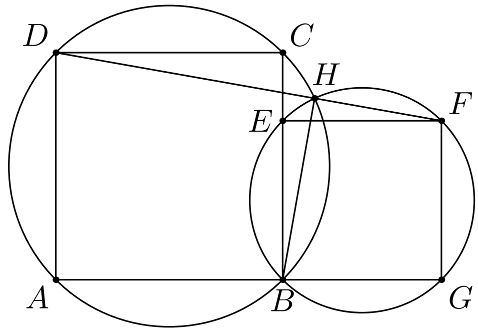
Rozwiązanie. Ponieważ kąty AEB i ADB są proste, więc punkty E i D leżą na okręgu o średnicy AB. Czworokąt $ABDE$ jest więc wpisany w okrąg.



Zatem $\measuredangle EDB = 180^\circ - \measuredangle BAE$, skąd wynika, że $\measuredangle EDC = \measuredangle BAC$. Podobnie dowodzimy, że $\measuredangle DEC = \measuredangle ABC$.

10. Punkt E leży na boku BC kwadratu $ABCD$. Kwadrat $BEFG$ leży na zewnątrz kwadratu $ABCD$. Okręgi opisane na tych kwadratach przecinają się w punktach B i H. Udowodnij, że punkty D, H i F są współliniowe.

Rozwiązanie. Połączmy punkt H z punktami D, B i F.



Ponieważ punkt H leży na okręgu opisanym na kwadracie $ABCD$, więc

$$\measuredangle BHD = \measuredangle BCD = 90°.$$

Punkt H leży także na okręgu opisanym na kwadracie $BEFG$. Zatem

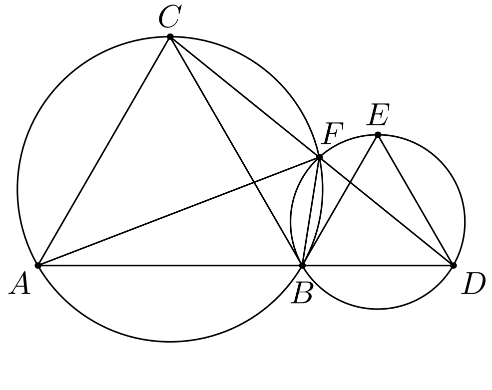
$$\measuredangle BHF = \measuredangle BEF = 90°.$$

Stąd wynika, że $\measuredangle DHF = 180°$, czyli punkty D, H i F są współliniowe.

Uwaga. Można udowodnić, że punkty C, H i G są współliniowe, a także, że punkty A, E i H są współliniowe. Stąd wynika, że proste AE, CG i DF przecinają się w jednym punkcie.

11. Trójkąty równoboczne ABC i BDE są położone tak, że punkt B leży wewnątrz odcinka AD oraz wierzchołki C i E leżą po tej samej stronie prostej AD. Okręgi opisane na tych trójkątach przecinają się w punktach B i F. Udowodnij, że punkty C, F i D są współliniowe.

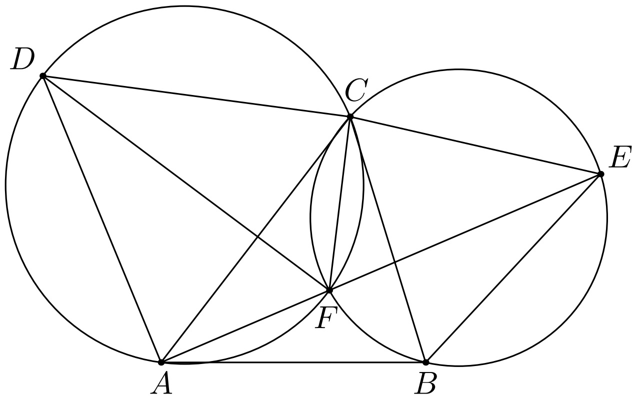
Rozwiązanie. Połączmy punkt F z punktami A, B, C i D.



Punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Zatem $\measuredangle CFA = \measuredangle CBA = 60°$ oraz $\measuredangle AFB = \measuredangle ACB = 60°$. Ponieważ punkt F leży też na okręgu opisanym na trójkącie BDE, więc $\measuredangle BFD = \measuredangle BED = 60°$. Stąd wynika, że $\measuredangle CFD = 180°$. Punkty C, F i D są więc współliniowe.

12. Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, na zewnątrz trójkąta, dwa trójkąty równoboczne ACD i BCE. Okręgi opisane na tych trójkątach równobocznych przecinają się w punktach C i F. Udowodnij, że punkty A, F i E są współliniowe.

Rozwiązanie. Połączmy punkt F z punktami A, D, C i E.

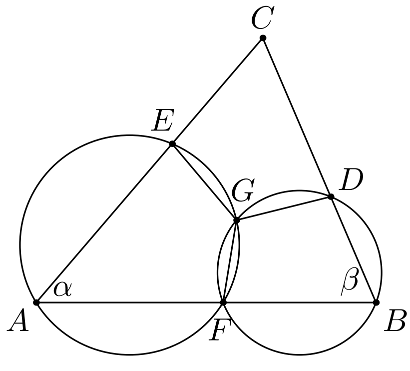


Punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ACD. Zatem $\measuredangle AFD = \measuredangle ACD = 60°$ oraz $\measuredangle DFC = \measuredangle DAC = 60°$. Ponieważ punkt F leży też na okręgu opisanym na trójkącie BCE, więc $\measuredangle CFE = \measuredangle CBE = 60°$. Stąd wynika, że $\measuredangle AFE = 180°$. Punkty A, F i E są więc współliniowe.

Uwaga. Punkt F nazywamy punktem Torricellego. Jest to punkt, dla którego suma odcinków $AF + BF + CF$ jest najmniejsza.

13. Na bokach BC, AC i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D, E i F. Okręgi opisane na trójkątach AFE i BDF przecinają się w punktach F i G. Udowodnij, że $\measuredangle DGE = \measuredangle BAC + \measuredangle ABC$.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąty BAC i ABC literami α i β. Połączmy punkt G z punktami D, E i F.

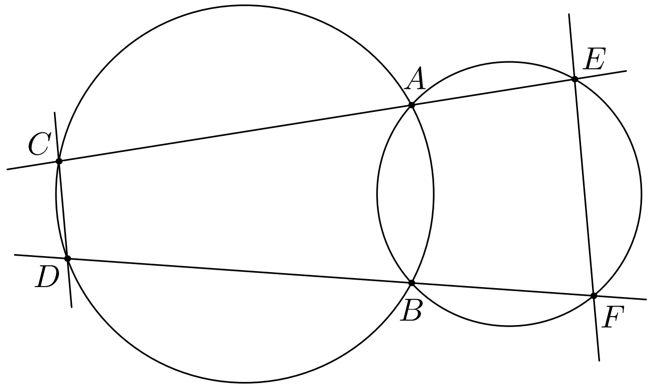


Czworokąt $AFGE$ jest wpisany w okrąg, więc $\measuredangle EGF = 180° - \alpha$. Podobnie pokazujemy, że $\measuredangle DGF = 180° - \beta$. Stąd otrzymujemy

$$\measuredangle DGE = 360° - \measuredangle EGF - \measuredangle DGF = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta.$$

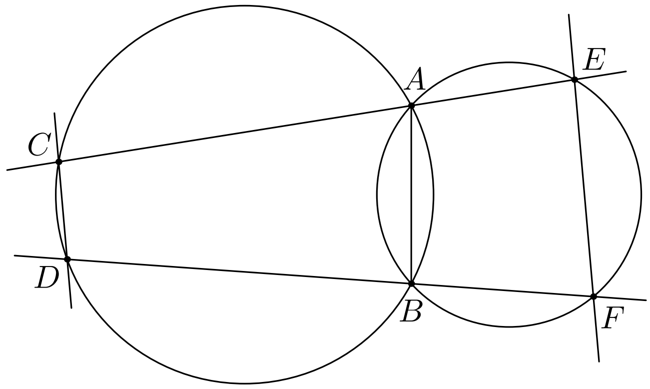
Uwaga. Z powyższego zadania wynika wniosek: na czworokącie $CEGD$ można opisać okrąg. Inaczej mówiąc, okręgi opisane na trójkątach AFE, BDF i CED mają punkt wspólny. Tak sformułowane twierdzenie nosi nazwę twierdzenia Miquela i jego treść była zadaniem olimpijskim.

14. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina te okręgi w punktach C i E różnych od A; prosta przechodząca przez punkt B przecina te okręgi w punktach D i F różnych od B (zob. rysunek).



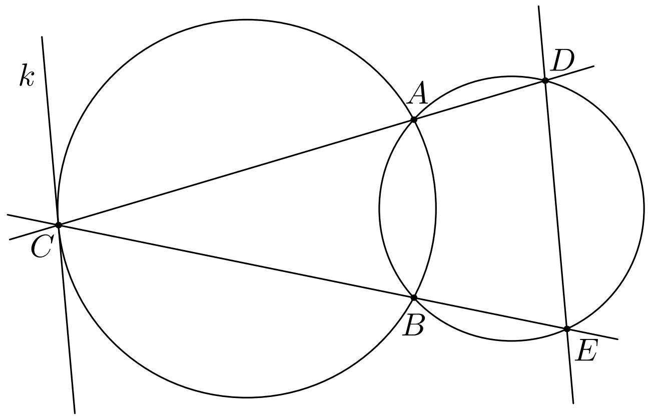
Udowodnij, że proste CD i EF są równoległe.

Rozwiązanie. Narysujmy odcinek AB.



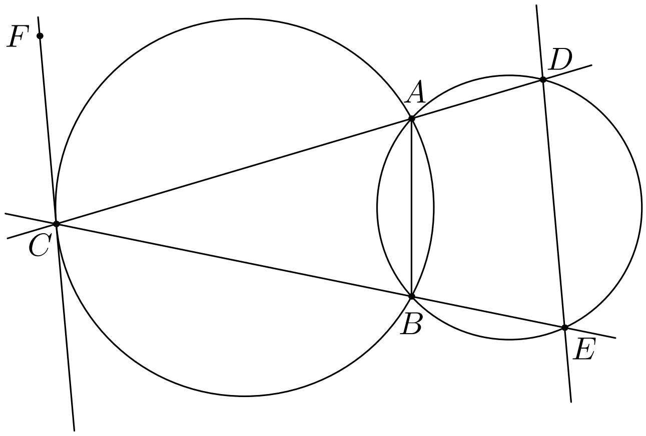
Czworokąt $CDBA$ jest wpisany w okrąg. Stąd wynika, że $\measuredangle BAC = 180^\circ - \measuredangle CDB$. Kąty BAC i BAE są przyległe, więc $\measuredangle CDB = \measuredangle BAE$. Czworokąt $ABFE$ jest wpisany w okrąg, więc $\measuredangle BAE + \measuredangle BFE = 180^\circ$. Stąd wynika, że $\measuredangle CDF + \measuredangle DFE = 180^\circ$, a więc proste CD i EF są równoległe.

15. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Proste przechodzące przez punkty A i B przecinają jeden z tych okręgów w punkcie C różnym od A i B oraz przecinają drugi okrąg odpowiednio w punktach D i E różnych od A i B. Prosta k jest styczna do pierwszego okręgu w punkcie C (zob. rysunek).



Udowodnij, że prosta k jest równoległa do prostej DE.

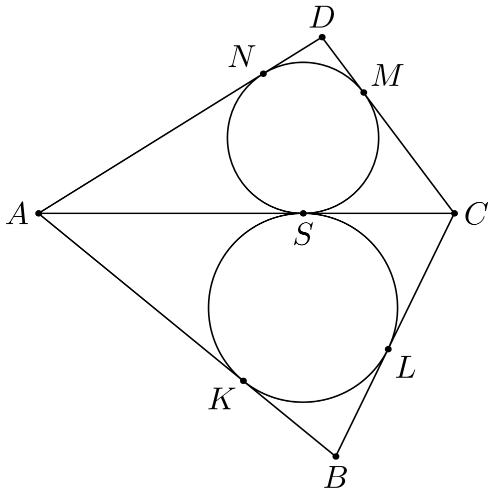
Rozwiązanie. Narysujmy odcinek AB i wybierzmy punkt F na prostej k tak jak na rysunku:



Z twierdzenia o kącie między styczną i cięciwą wynika, że $\measuredangle FCA = \measuredangle CBA$. Ponieważ kąty CBA i EBA są przyległe, więc $\measuredangle FCA + \measuredangle EBA = 180°$. Czworokąt $ABED$ jest wpisany w okrąg, więc $\measuredangle EBA + \measuredangle EDA = 180°$. Stąd wynika, że $\measuredangle FCA = \measuredangle EDA$. Równość tych kątów naprzemianległych dowodzi, że proste CF i DE są równoległe.

16. W czworokącie wypukłym $ABCD$ poprowadzono przekątną AC. Okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne zewnętrznie. Udowodnij, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

Rozwiązanie. Niech okrąg wpisany w trójkąt ABC będzie styczny do boków tego trójkąta w punktach K, L i S i niech okrąg wpisany w trójkąt ACD będzie styczny do boków tego trójkąta w punktach S, M i N, tak jak na rysunku:



Mamy wówczas (na podstawie twierdzenia o równości odcinków stycznych):

$$AK = AS = AN,$$
$$CL = CS = CM,$$
$$BK = BL,$$
$$DM = DN.$$

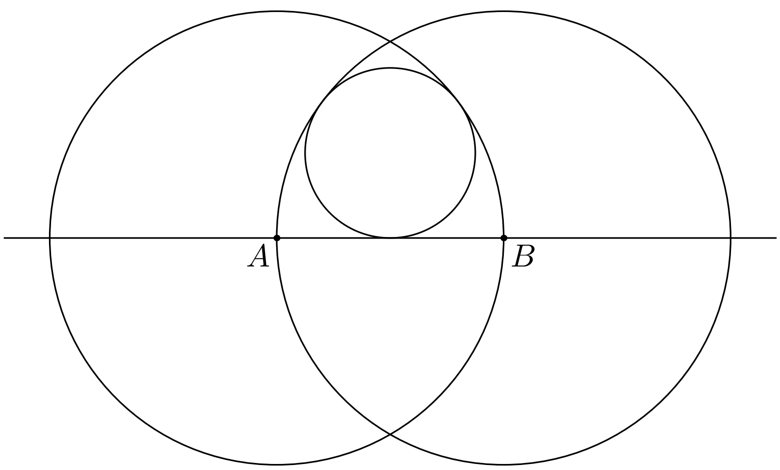
Stąd

$$AB + CD = AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN = AD + BC,$$

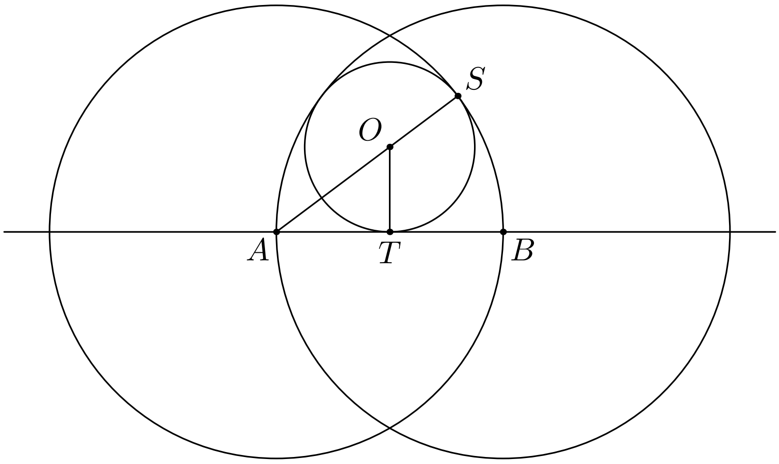
co dowodzi, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

3. Okręgi styczne

17. Dany jest odcinek AB o długości 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB oraz styczny wewnętrznie do obu okręgów o środkach A i B (zob. rysunek), ma promień równy $\frac{3}{4}$.



Rozwiązanie. Niech punkt O będzie środkiem rozważanego okręgu stycznego do dwóch danych okręgów i do prostej AB. Niech S i T będą punktami styczności tego okręgu z okręgiem o środku A i z prostą AB (zob. rysunek):



Niech r będzie promieniem okręgu o środku O. Zauważmy, że wówczas

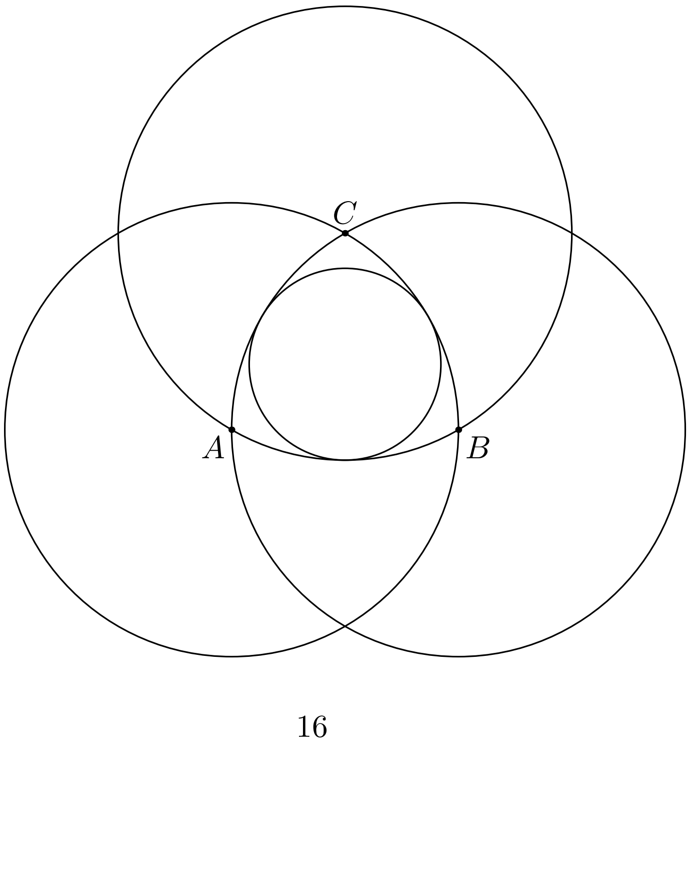
$$AT = 1, \quad OT = r, \quad AO = 2 - r.$$

Ostatnia równość wynika z tego, że punkty A, O i S są współliniowe. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ATO otrzymujemy $AT^2 + OT^2 = AO^2$, czyli

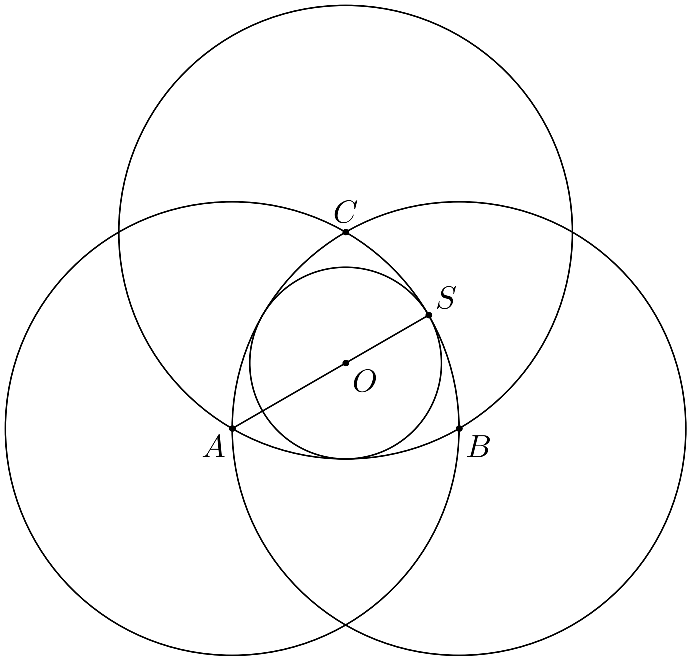
$$1^2 + r^2 = (2 - r)^2.$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania jest $r = \frac{3}{4}$.

18. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 2. Punkty A, B i C są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg zawarty wewnątrz tych trzech okręgów, styczny wewnętrznie do nich (zob. rysunek), ma promień równy $\frac{2}{3}(3-\sqrt{3})$.



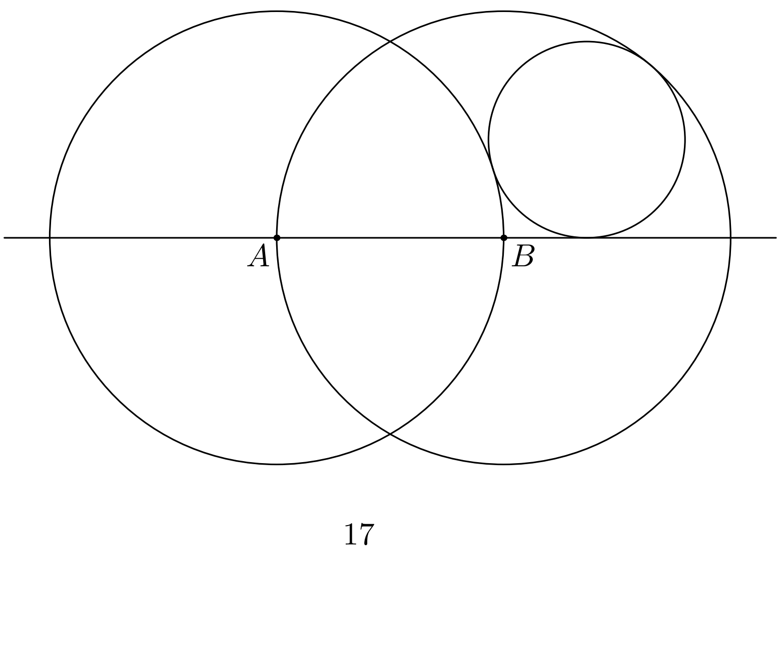
Rozwiązanie. Niech O będzie środkiem rozważanego okręgu stycznego do trzech danych okręgów i niech S będzie punktem styczności tego okręgu z okręgiem o środku A (zob. rysunek):



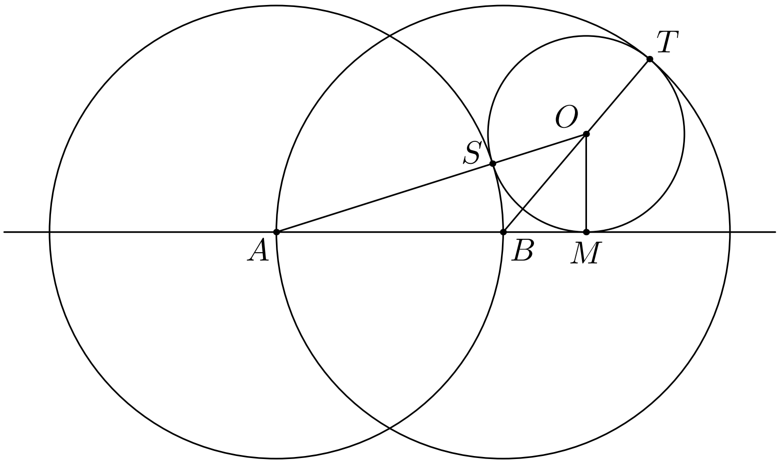
Oczywiście punkt O jest środkiem ciężkości trójkąta ABC oraz punkty A, O i S są współliniowe. Mamy wówczas

$$OS = AS - AO = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot (3 - \sqrt{3}).$$

19. Dany jest odcinek AB o długości 2. Punkty A i B są środkami okręgów o promieniu 2. Udowodnij, że okrąg styczny do prostej AB, styczny zewnętrznie do okręgu o środku A oraz styczny wewnętrznie do okręgu o środku B (zob. rysunek), ma promień równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Rozwiązanie. Niech punkt O będzie środkiem rozważanego okręgu stycznego do danych okręgów o środkach A i B. Niech następnie S i T będą punktami styczności okręgu o środku O z okręgami o środkach A i B. Wreszcie niech M będzie punktem styczności okręgu o środku O z prostą AB (zob. rysunek):



Przyjmijmy oznaczenia:

$$BM = x, \quad OM = r.$$

Punkty A, S i O są współliniowe, więc $AO = 2 + r$. Podobnie punkty B, O i T są współliniowe, więc $BO = 2 - r$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów AMO i BMO otrzymujemy równania

$$AM^2 + OM^2 = AO^2, \quad BM^2 + OM^2 = BO^2,$$

czyli

$$(2 + x)^2 + r^2 = (2 + r)^2, \quad x^2 + r^2 = (2 - r)^2.$$

Przekształcamy pierwsze równanie, podstawiając $(2 - r)^2$ w miejsce $x^2 + r^2$:

$$\begin{gathered}
(2 + x)^2 + r^2 = (2 + r)^2, \\
4 + 4x + x^2 + r^2 = 4 + 4r + r^2, \\
4x + (2 - r)^2 = 4r + r^2, \\
4x + 4 - 4r + r^2 = 4r + r^2, \\
4x + 4 - 4r = 4r, \\
x = 2r - 1.
\end{gathered}$$

Obliczoną wartość x podstawiamy do równania $x^2 + r^2 = (2 - r)^2$:

$$\begin{gathered}
x^2 + r^2 = (2 - r)^2, \\
(2r - 1)^2 + r^2 = (2 - r)^2, \\
4r^2 - 4r + 1 + r^2 = 4 - 4r + r^2, \\
4r^2 = 3,
\end{gathered}$$

skąd otrzymujemy $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

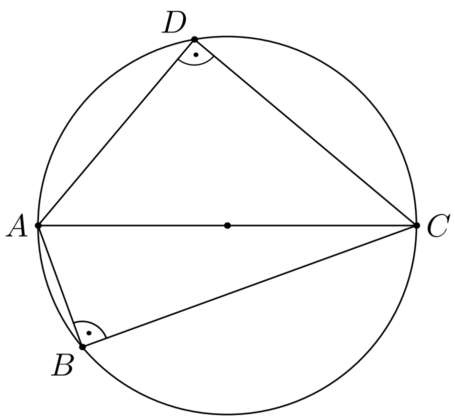
4. Twierdzenie Pitagorasa i okręgi

20. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Jeden kąt tego czworokąta jest prosty. Udowodnij, że jeszcze co najmniej jeden kąt jest prosty oraz $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2$.

Rozwiązanie. Niech

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d.$$

Załóżmy, że kąt ABC jest prosty. Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wynika, że przekątna AC jest średnicą okręgu, a następnie, że kąt ADC jest prosty.

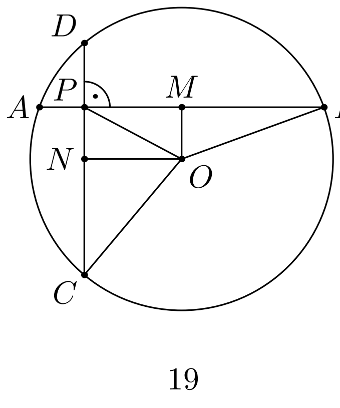


Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów ABC i ADC wynika teraz, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (AB^2 + BC^2) + (CD^2 + DA^2) = AC^2 + AC^2 = 2 \cdot (2r)^2 = 8r^2.$$

21. W okręgu o środku O i promieniu r poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy o długościach $2a$ i $2b$ przecinające się w punkcie P. Udowodnij, że $OP^2 + a^2 + b^2 = 2r^2$.

Rozwiązanie. Poprowadźmy w okręgu o środku O i promieniu r prostopadłe cięciwy $AB = 2a$ i $CD = 2b$. Niech M i N będą rzutami środka O na cięciwy AB i CD. Niech ponadto P będzie punktem przecięcia obu cięciw.



Mamy wówczas $MB = a$ i $NC = b$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów BMO i CNO dostajemy

$$OM^2 = OB^2 - MB^2 = r^2 - a^2 \quad \text{oraz} \quad ON^2 = C^2 - NC^2 = r^2 - b^2.$$

Czworokąt $PNOM$ jest prostokątem, więc

$$OP^2 = OM^2 + ON^2 = 2r^2 - (a^2 + b^2),$$

skąd wynika, że $OP^2 + a^2 + b^2 = 2r^2$.

22. Wierzchołki czworokąta $ABCD$ o bokach długości a, b, c i d leżą na okręgu o promieniu r. Przekątne tego czworokąta są prostopadłe. Udowodnij, że

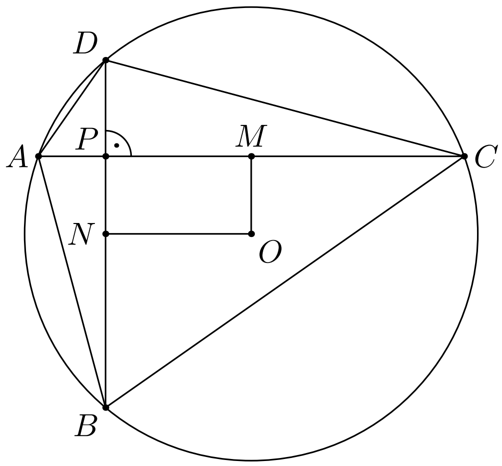
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

Rozwiązanie. Niech

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d.$$

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD i niech punkty M i N będą środkami tych przekątnych. Niech wreszcie

$$AP = x, \quad BP = y, \quad CP = z, \quad DP = t.$$



Mamy wówczas

$$\begin{aligned} AB^2 &= AP^2 + BP^2 = x^2 + y^2, \\ BC^2 &= BP^2 + CP^2 = y^2 + z^2, \\ CD^2 &= CP^2 + DP^2 = z^2 + t^2, \\ DA^2 &= DP^2 + AP^2 = t^2 + x^2. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Ponieważ

$$AC = x + z = 2 \cdot \frac{x+z}{2} \quad \text{oraz} \quad BD = y + t = 2 \cdot \frac{y+t}{2},$$

więc z poprzedniego zadania dostajemy

$$OP^2 = 2r^2 - \left(\left(\frac{x+z}{2} \right)^2 + \left(\frac{y+t}{2} \right)^2 \right).$$

Następnie

$$\begin{aligned} PM &= AM - AP = \frac{x+z}{2} - x = \frac{z-x}{2}, \\ PN &= DN - DP = \frac{y+t}{2} - t = \frac{y-t}{2}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} 2r^2 &= OP^2 + \left(\frac{x+z}{2} \right)^2 + \left(\frac{y+t}{2} \right)^2 = \\ &= PM^2 + PN^2 + \left(\frac{x+z}{2} \right)^2 + \left(\frac{y+t}{2} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{z-x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y-t}{2} \right)^2 + \left(\frac{x+z}{2} \right)^2 + \left(\frac{y+t}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{z^2 - 2xz + x^2 + y^2 - 2yt + t^2 + x^2 + 2xz + z^2 + y^2 - 2yt + t^2}{4} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{2}. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4r^2,$$

czyli

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

Uwaga. W zadaniach 20 i 22 udowodniliśmy, że jeśli w czworokącie o bokach długości a, b, c i d wpisanym w okrąg o promieniu r przekątne są prostopadłe lub co najmniej jeden kąt jest prosty, to

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2.$$

Można udowodnić także twierdzenie odwrotne: jeśli w czworokącie o bokach długości a, b, c i d wpisanym w okrąg o promieniu r zachodzi równość

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8r^2,$$

to przekątne tego czworokąta są prostopadłe lub co najmniej jeden kąt jest prosty. Dowód tego twierdzenia jest jednak znacznie trudniejszy; twierdzenie to było treścią zadania olimpijskiego.