DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1) Z czterech sprawdzianów Małgosia uzyskała średnią 12 pkt. Ile najmniej punktów wystarczy że zdobędzie z piątego sprawdzianu, aby osiągnąć średnią 17 punktów?

2) Prostopadłościenny pojemnik napełniony po brzegi waży 5 kg, a napełniony do połowy – tylko 3,25 kg. Ile waży pusty pojemnik?

3) Jaka jest cyfra jedności liczby 2013^{2014}?

4) Jaka jest długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o bokach 3, 4, 5?

5) Czy liczba $-2–2\sqrt{2}+\sqrt{8}$ jest wymierna?

6) Liczby x i y spełniają równanie $(x–y)^2+(x+y–4)^2=0$. Ile wynosi iloczyn tych liczb?

7) W trójkącie *ABC* dwusieczne kątów *ABC* i *ACB* przecinają się w punkcie *D*. Miara kąta *BDC* wynosi 140°. Jaka jest miara kąta *BAC*?

8) Jakie ciężary można odważyć, mając do dyspozycji wagę szalkową i po jednym odważniku o masie: 1 kg, 3 kg, 9 kg i 27 kg?

9) Czy istnieje taki czworokąt, który nie jest rombem, a każda jego przekątna dzieli go na dwa trójkąty równoramienne?

10) Czy istnieje taki ostrosłup o podstawie kwadratowej, który nie jest prawidłowy, ale każda jego ściana boczna jest trójkątem równoramiennym?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Niech a, b, c, d to punkty otrzymane z 4 sprawdzianów. Ich średnia $(a+b+c+d)/4$ wynosi 12, więc suma liczb a, b, c, d wynosi 48. Jeśli e to wynik z piątego sprawdzianu, otrzymamy $(48+e)/5 = 17$, skąd $e = 37$. Za bardziej skomplikowane ale poprawne rozumowanie odejmujemy 2 pkt.

2. Niech x to masa pojemnika (tara), a y – masa substancji wypełniającej go w całości (netto). Mamy $5 = x+y$ oraz $3{,}25 = x+y/2$. Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy x=1,5 kg.

3. Ostatnia cyfra iloczynu liczb zależy tylko od ostatnich cyfr czynników, co wynika z algorytmu mnożenia pisemnego (za brak tej uwagi odejmujemy 2 pkt). Wystarczy więc badać kolejne iloczyny trójek, a ich ostatnia cyfra zmienia się okresowo w cyklu długości cztery: 3, 9, 7, 1. Liczba 2014 daje z dzielenia przez 4 resztę dwa, zatem szukana cyfra to 9.

4. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, ten trójkąt jest prostokątny (za powołanie się na twierdzenie Pitagorasa odejmujemy 2 pkt). Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie wpisanym w okrąg opartym na średnicy (za powołanie się na twierdzenie proste odejmujemy 2 pkt, chyba ze już odjęto je poprzednio), przeciwprostokątną trójkąta jest średnica okręgu, więc jego promień wynosi 2,5.

5. Z rozdzielności pierwiastkowania względem mnożenia mamy $\sqrt{8} = \sqrt{(4\cdot 2)} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (na prośbę jury uczeń powinien nazwać prawo działań, z jakiego korzysta, jeśli tego nie potrafi, odejmujemy 2 pkt). Zatem wynikiem działania jest -2, będąca liczbą całkowitą, więc tym bardziej wymierną.

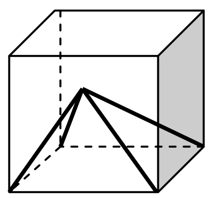
6. Składniki po lewej stronie są nieujemne, więc oba muszą być zerami. Rozwiązując odpowiedni układ równań otrzymujemy jeden pierwiastek (2, 2). Szukany iloczyn wynosi 4.

7. Przy standardowych oznaczeniach mamy w trójkącie BDC sumę kątów wewnętrznych $\beta/2+\gamma/2+140°=180°$, skąd $\beta+\gamma=80°$. Suma kątów wewnętrznych w trójkącie ABC wynosi więc $\alpha+80°=180°$, skąd szukany kąt ma miarę 100°.

8. Wszystkie od 1 (lub od 0) do 40=1+3+9+27. Za kolejne sprawdzanie wszystkich ustawień bez ustalenia systematycznej procedury odejmujemy 2 pkt. Za brak jednego ciężaru przyznajemy 5 pkt, za więcej niż jednego 0 pkt. Uczeń powinien podać systematyczna procedurę uzyskiwania kolejnych ciężarów, np. taką (ustalamy, że ważony ciężar jest na lewej szalce): Gdy waga jest od razu w równowadze, jest to ciężar zerowy. Jeśli nie, to stawiamy odważnik 1-kilogramowy na szalce prawej. Gdyby lewa wciąż przeważała, przekładamy go na lewą, a na prawej stawiamy 3 kg. Jeśli lewa nadal jest cięższa, zdejmujemy odważnik kilogramowy. Potem dostawiamy go po prawej, a jeśli szalka z ważonym ciężarem jest nadal cięższa, przenosimy na nią oba odważniki, a na prawej stawiamy kolejny - 9 kg itd.

9. Tak. Rysujemy trzy promienie okręgu co np. 30° i łączymy kolejno ich końce leżące na okręgu. Powstaje deltoid nie będący rombem o żądanej własności.

10. Tak. Jako podstawę ostrosłupa bierzemy dolną ścianę sześcianu, a jako wierzchołek – punkt na ścianie frontowej tego sześcianu, który po połączeniu z wierzchołkami dolnej podstawy tworzy na tej ścianie trójkąt równoboczny. Taki ostrosłup nie jest prawidłowy, bo spodek wysokości nie znajduje się w środku podstawy (za brak sprawdzenia tego warunku odejmujemy 3 pkt), ale ściany boczne są trójkątami równoramiennymi, co łatwo sprawdzić.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA
MECZ II

1) Na Wyspach Bergamutach znane jest działanie * zdefiniowane w następujący sposób: $a*b = ab+a+b$. Wiadomo, że $3*5 = 2*x$. Ile wynosi x?

2) Złotowłosa księżniczka została uwięziona na szczycie ponurej baszty. Dzielny książę pragnie ją uwolnić, ale nie może podejść bliżej niż na skraj lasu oddalonego od baszty o 500 stóp. Z tego miejsca, leżąc płasko na ziemi, widzi basztę pod kątem 45 stopni. Jaka odległość dzieli go wtedy od księżniczki?

3) W pewnym miesiącu niedziela wypadła trzykrotnie w dniu parzystym. W jakim dniu tygodnia wypadł 20 dzień tego miesiąca?

4) Jaka jest długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5?

5) Liczby a, b, c są dodatnie i spełniają warunki: $\frac{c}{a-b} = 3$ oraz $\frac{c}{a+b} = 2$. Która z tych liczb jest najmniejsza?

6) W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ punkt M jest środkiem boku DE. Jaką częścią sześciokąta jest trójkąt ABM?

7) Płaszczyznę da się pokryć, używając nieskończenie wielu przystających kwadratów, trójkątów równobocznych lub sześciokątów foremnych. A czy można to zrobić za pomocą jakiegoś innego wielokąta foremnego?

8) Udowodnij, że liczba o zapisie dziesiętnym $a_1a_2a_3...a_{99}$ dzieli się przez 37 wtedy i tylko wtedy, gdy 37 dzieli sumę jej trzycyfrowych odcinków (tzn. liczb $a_1a_2a_3$, $a_4a_5a_6$, ..., $a_{97}a_{98}a_{99}$).

9) Czy istnieje trójkąt ostrokątny, nierównoramienny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są całkowite?

10) Czy istnieje taki ostrosłup o podstawie będącej pięciokątem foremnym, który nie jest prawidłowy, ale każda jego ściana boczna jest trójkątem równoramiennym?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Mamy 3*5=15+3+5=23 oraz $2*x=2x+2+x=3x+2 = 23$. Stąd $3x = 21$, czyli $x=7$.

2. Zakładamy że baszta stoi prosto na płaskim terenie (za brak tego modelowania odejmujemy 1 pkt). Skoro książę widzi z poziomu ziemi basztę pod kątem 45° (tzn. proste wychodzące z oka do podstawy i szczytu baszty tworzą taki właśnie kąt), to odległość od baszty jest równa jej wysokości, bo otrzymamy trójkąt prostokątny równoramienny. Jego ramiona mają długość 500, wiec odległość od księżniczki jest przeciwprostokątną i wynosi $500\sqrt{2}$.

3. Skoro w miesiącu były 3 parzyste niedziele, to musiały być rozdzielone 2 nieparzystymi (tydzień ma nieparzystą liczbę dni, wiec dni tygodnia zmieniają parzystość daty w obrębie miesiąca z tygodnia na tydzień – za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 3 pkt). Zatem w miesiącu niedziel było co najmniej 5. Jeśli miesiąc zaczyna się niedzielą i ma ich 5, musi mieć co najmniej 29 dni, ale jeśli trzy z nich mają mieć daty parzyste, pierwsza musi wypaść w drugim dniu miesiąca, co daje 30 dni. Nie może wypaść w czwartym dniu miesiąca (lub później), bo wtedy miesiąc musiałby mieć 32 dni (lub więcej), co jest niemożliwe. Daty pozostałych niedziel wypadają co 7 (9, 16, 23 i 30 dnia), a dzień dwudziesty jest czwarty po niedzieli, czyli jest czwartkiem.

4. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, ten trójkąt jest prostokątny (za powołanie się na twierdzenie Pitagorasa odejmujemy 2 pkt). Z tego wynika, że promienie poprowadzone do punktów styczności na przyprostokątnych są do tych przyprostokątnych równoległe (powstaje kwadrat o boku r). Środek okręgu wpisanego leży w przecięciu dwusiecznych kątów, zatem odcinki utworzone na sąsiednich bokach do punktów styczności są równe. Mamy zatem dla przeciwprostokątnej c równość $c = a–r+b–r = (a+b)–2r$, skąd $r=(a+b–c)/2$.

5. Najmniejsze jest b. Z I warunku $a–b>0$, czyli $a>b$. Warunki zadania można zapisać równoważnie jako $2c=6a-6b$ oraz $3c=6a+6b$. Po dodaniu ich stronami mamy $5c=12a$, wiec $c=(12/5)a$, czyli $c>a$.

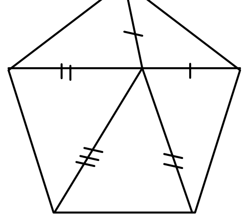
6. Podzielny sześciokąt na 6 przystających trójkątów o wspólnym wierzchołku w środku O sześciokąta. Przedłużamy wysokość w trójkącie ABO, otrzymując wysokość trójkąta ABM, która jest 2 razy dłuższa. Podstawy trójkątów są jednakowe zatem pole trójkąta ABM jest dwa razy większe niż ABO. Skoro trójkąt ABO stanowił 1/6 sześciokąta, to ABM stanowi 1/3.

7. Nie można, bo kąty stykających się wierzchołkiem wielokątów muszą sumować się do 360°, więc pięciokątów foremnych musiałoby stykać się $3\ {}^1/_3$, a siedmio- i więcej-kątów foremnych - mniej niż trzy, co jest niemożliwe.

8. Podkreślony zapis oznacza liczbę złożoną z danych cyfr. Mamy $\underline{a_1a_2a_3...a_{99}} = \underline{a_1a_2a_3}\cdot 10^{96} + \underline{a_4a_5a_6}\cdot 10^{93} + ... + \underline{a_{97}a_{98}a_{99}} = (\underline{a_1a_2a_3} + \underline{a_4a_5a_6} + ... + \underline{a_{97}a_{98}a_{99}}) + (\underline{a_1a_2a_3}\cdot(10^{96}-1) + \underline{a_4a_5a_6}\cdot(10^{93}-1) + ... + \underline{a_{94}a_{96}a_{96}}\cdot(10^3-1))$, a ponieważ liczby postaci $10^{3n}-1$ to w zapisie dziesiętnym $3n$ dziewiątek, dzielą się one przez 999, a zatem i przez 37. Każdy składnik sumy w drugim nawiasie jest więc podzielny przez 37, a stąd wynika opisana cecha podzielności.

9. Zacznijmy od dwóch niepodobnych trójkątów pitagorejskich, o bokach np. 5, 12, 13 i 3, 4 i 5. Przeskalujmy ten drugi w skali 3, tak by przyprostokątna o boku 4 miała długość 12. Sklejmy ten trójkąt z 5, 12, 13 bokami o długości 12. Otrzymany trójkąt ma boki długości 13, 14, 15 i jest różnoboczny, a także ostrokątny, co łatwo sprawdzić z twierdzenia Pitagorasa: $15^2<14^2+13^2$(za brak sprawdzenia ostrokątności odejmujemy 4 pkt). Zbadajmy wysokości tego trójkąta. Jedna z nich jest sklejonym bokiem, wiec ma długość 12. Pozostałe wyznaczymy z pola trójkąta, które wynosi $1/2\cdot 14\cdot 12=84 = 1/2\cdot 15\cdot(2i4/5) = 1/2\cdot 13\cdot(3i3/13)$. Zatem wysokości opuszczone na podstawy mają długości 2 i 4/5 oraz 3 i 3/13. Teraz wystarczy trójkąt ten przekształcić w skali $5\cdot 13=65$, boki pozostaną całkowite, a wysokości też staną się całkowite.

10. Rysunek przedstawia widok ostrosłupa z góry. Odcinki dwukreślne mają długość taką, jak bok podstawy. Ostrosłup nie jest prawidłowy, gdyż ścianę z ramionami razkreślnymi możemy ustawić np. w płaszczyźnie prostopadłej do podstawy ostrosłupa i spodek wysokości nie pokryje się ze środkiem podstawy (za brak uzasadnienia odejmujemy 2 pkt). Ściany boczne ostrosłupa, jak łatwo sprawdzić są równoramienne.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA
MECZ III

1) W trójkącie równoramiennym *ABC* kąt A ma 18°. Jaka miarę ma kąt *B*?

2) Czy liczba, której zapis dziesiętny jest następujący *aababbab*, gdzie *a* i *b* są pewnymi cyframi, jest podzielna przez 11?

3) W okrąg o średnicy 18 wpisano prostokąt o boku 10. Jaka jest długość odcinka łączącego środki sąsiednich boków tego prostokąta?

4) Ile wynosi suma cyfr liczby 10^{2013}–2013?

5) Z zapałek długości 5 cm należy ułożyć kwadratową „szachownicę" o boku 1 m (pola tej szachownicy to kwadraty o boku długości jednej zapałki). Ile zapałek trzeba w tym celu użyć?

6) Cztery jednakowe cylindryczne słoiki umieszczono ciasno we wnętrzu okrągłego garnka (na styk). Promień podstawy słoika wynosi 1. Jaka jest średnica garnka?

7) Czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej *n* zbiór {1, 3, 5, ..., 4*n*-1} da się podzielić na dwa takie, że suma elementów jednego jest trzykrotnie większa od sumy elementów drugiego?

8) Na ile sposobów można ustalić nawiasami kolejność odejmowań w napisie *a*–*b*–*c*–*d*? Ile można otrzymać w ten sposób różnych wyników niezależnie od wartości *a*, *b*, *c*, *d*?

9) Czy istnieją takie trójkąty *ABE* i *ABF*, że wysokość trójkąta *ABE* poprowadzona z wierzchołka *E* jest mniejsza od wysokości trójkąta *ABF* poprowadzonej z wierzchołka *F*, a promień okręgu wpisanego w trójkąt *ABE* jest większy od promienia okręgu wpisanego w trójkąt *ABF*?

10) Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

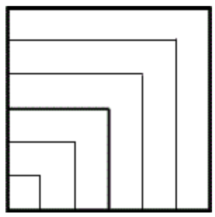
1. W zależności od tego, jak oznaczone są wierzchołki trójkąta i gdzie wypadają jego ramiona, kąt B może mieć miarę 18°, 81°, 144°. Za pominiecie jednej możliwości odejmujemy 5 pkt. Za pominięcie dwóch przyznajemy 2 pkt.

2. Liczbę *aababbab* można zapisać jako $10^7a+10^6a+10^5b+10^4a+10^3b+10^2b+10a+b$ = $11010010a+101101b$, a oba współczynniki liczbowe dzielą się przez 11 (brak uzasadnienia tych podzielności to 2 pkt mniej za każdą).

3. Przekątna prostokąta ma długość 18 (średnica), a szukany odcinek jest średnicą dwa razy mniejszego prostokąta podobnego, wiec jest dwa razy krótszy i ma długość 9. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie (np. z obliczaniem długości drugiego boku prostokąta) odejmujemy 2 pkt.

4. 10^{2013} to jedynka i 2013 zer. Po odjęciu 2013 na ostatnich czterech miejscach SA cyfry 7987, a wcześniej jest 2009 dziewiątek, co wynika z algorytmu odejmowania pisemnego (za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 2 pkt). Zatem suma cyfr wynosi $2009\cdot9+7+9+8+7 = 2010\cdot9+22 = 18090+22 = 18112$.

5. Na długości 1m mieści się 20 zapałek. Na każdym początku i końcu zapałki dokładamy prostopadłą do niej (jeżeli 2 zapałki leżą obok siebie, to prostopadła do końca poprzedniej jest też prostopadła do początku następnej). Otrzymujemy 21 wierszy po 20 zapałek i 21 kolumn po 20 zapałek, czyli 840 zapałek.

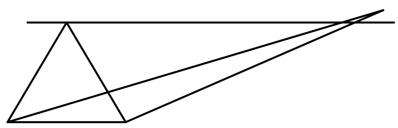


6. Ze środków denek niesąsiednich słoików przeprowadzimy promienie do punktu styczności z garnkiem i sąsiednimi słoikami. Wtedy średnicę garnka można wysumować z dwóch promieni słoika i przekątnej kwadratu o boku będącym podwojonym promieniem słoika, czyli wynosi ona $1+1+2\sqrt{2}$ = $2+2\sqrt{2}$.

7. Zasadę takiego podziału wyjaśnia rysunek. Wielokąty (tzw. gnomony) o polach 1, 3 i 5 składają się na kwadrat będący ćwiartką dużego, a pozostałe 3/4 dają gnomony o polach 5, 7 i 9. To rozumowanie jest poprawne dla każdego *n*.

8. Nawiasy można rozstawić na 5 sposobów: $((a-b)-c)-d$, $(a-b)-(c-d)$, $(a-(b-c))-d$, $a-((b-c)-d)$, $a-(b-(c-d))$. Nie uwzględniamy rozstawień typu a-b-c-d albo (a-b-c-d), bo one nie wskazują same z siebie żadnej kolejności. Łatwo sprawdzić, że wyrażenia trzecie i piąte, są tożsame.

9. Za rozwiązanie opisujące rysunkowo intuicje rozwiązania przyznajemy 5 pkt.
Ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt (uczeń powinien go na prośbę jury uzasadnić, jeśli tego nie potrafi, odejmujemy 3 pkt) mamy $r=\dfrac{2P}{a+b+c}$.



Oba trójkąty mają niemal jednakowe pola, a obwód drugiego można uczynić dowolnie dużym, odsuwając wierzchołek *F*. Wtedy promień staje się dowolnie mały.

10. Tak, np. lekko „zestrugany” symetrycznie z dwóch stron graniastosłup sześciokątny z jedną krawędzią zamiast górnej podstawy łączącą jej dwa przeciwległe wierzchołki. Ściany tej bryły są czworokątami i jedna (dolna podstawa) jest sześciokątem.