DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1) Z dwóch różnych cyfr, z których żadna nie jest zerem, tworzymy wszystkie możliwe liczby dwucyfrowe. Jaka liczba pierwsza jest dzielnikiem sumy wszystkich tych liczb?

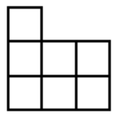
2) Liczba 145541 jest palindromem, bo nie zmienia wartości czytana w przód i wspak. Ma też tę szczególną własność, że wybrane z niej kolejne liczby dwucyfrowe (14, 45, 55, 54 i 41) są różne. Jaka jest największa liczba palindromiczna zapisana cyframi 1, 2 i 3 o tej samej własności?

3) Mateusz ma dwie młodsze siostry. Iloczyn lat trojga dzieci jest równy 396, a suma ich lat jest równa 23. Ile lat ma Mateusz?

4) Janek narysował cztery grupy prostych równoległych (ale żadna prosta z jednej grupy nie była równoległa do prostej z innej grupy) zawierające odpowiednio 20, 30, 40 i 50 prostych. Ile punktów przecięcia jest na jego rysunku?

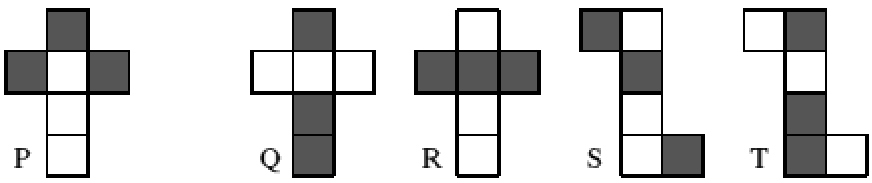
5) Wiadomo, że $^1/_a = a + {}^1/_b = b + {}^1/_c = 3$. Jaka jest wartość abc?

6) Rysunek przedstawia figurę złożoną z 7 kwadratów. Niektóre z nich należy zacieniować w taki sposób, aby zacieniowane były co najmniej dwa kwadraty, ale nie takie, które stykają się bokiem lub wierzchołkiem. Ile jest możliwych pokolorowań tej figury?



7) Ile liczb spełnia równanie $(3x+6)(x^2-9)(x^2+16)(x^3+1)=0$?

8) Rysunek przedstawia pięć siatek sześcianu wykonanych z kartonu (ściany mają ten sam kolor po obu stronach papieru). Z siatki P złożono sześcian. Która z pozostałych przedstawia siatkę identycznego sześcianu?



9) Prostokąt ma pole 120 cm^2 i obwód 46 cm. Jakie są długości jego przekątnych?

10) Na Morzu Śródziemnym tankowiec Ropniak znalazł się 100 km na północ od jachtu Wapniak. Tankowiec płynie w kierunku SE z prędkością 20 km/h, a jacht żegluje w kierunku NW z prędkością 10 km/h. Jaka najkrótsza odległość dzieli Ropniaka i Wapniaka?

EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

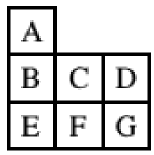
1. Niech cyfry z zadania to A i B. Za ich pomocą można zapisać cztery liczby dwucyfrowe: $\underline{AA} = 10A+A$, $\underline{AB} = 10A+B$, $\underline{BA} = 10B+A$ i $\underline{BB} = 10B+B$. Ich suma jest równa $22A + 22B = 22(A+B)$, co dzieli się przez 2 i 11. Inne dzielniki pierwsze nie wchodzą w grę, np. dla A=1 i B=3. W przypadku braku sprawdzenia, że innych rozwiązań nie ma, przyznajemy maksimum 5 pkt. Za brak uwzględnienia w rozumowaniu liczb AA i BB przyznajemy maksimum 3 pkt.

2. Z cyfr 1, 2 i 3 możemy utworzyć 9 różnych liczb dwucyfrowych (11, 22, 33, 12, 21, 13, 31, 23, 32) – jedną cyfrę z trzech wybieramy na 3 sposoby i dwie cyfry z trzech na trzy sposoby (to samo, co odrzucić jedną), ale możemy jeszcze zmieniać kolejność (czyli $3+2\cdot3$) za brak uzasadnienia, że to wszystkie możliwości odemujemy1 pkt. Teraz konstruujemy jak największą liczbę palidromiczną, spełniająca warunki zadania. Najlepiej gdyby zawierała wszystkie 9 liczb dwucyfrowych. Aby liczba była największa, zaczynamy od 3. Kolejne cyfry nie mogą się powtarzać (poza „środkiem" liczby), bo ta sama dwucyfrowa liczba wystąpiłaby dwukrotnie w symetrycznym położeniu. Zatem początek musi być taki 32…23. Trzecią cyfrą nie może być 3, bo powtórzą się liczby 32 i 23, zatem musi być 321…123. Teraz znowu można wpisać największą możliwa cyfrę, czyli 3. Dostajemy liczbę 3213…3123. Liczba 32133123 wyczerpuje już 8 z 9 możliwych liczb dwucyfrowych. Zostaje niewykorzystana liczba 11, jednak może ona stać jedynie w środku, ale wpisanie jej tam powoduje powtórzenia. Dlatego otrzymana do tej pory liczba jest największa z możliwych. Za podanie odpowiedzi bez uzasadnienia przyznajemy 3 pkt.

3. Rozkładamy liczbę 396 na czynniki pierwsze, co daje $11\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2$. Jedno z dzieci ma 11 lat (bo po połączeniu 11 z innym czynnikiem suma lat będzie większa niż 23). Z pozostałych czterech czynników musimy utworzyć dwa. Jeśli połączymy trzy czynniki, otrzymamy $3\cdot3\cdot2$ (ale 18+11>23), albo $2\cdot2\cdot3$ (ale 12+11+3 > 23). Jeśli połączymy po dwa czynniki, otrzymamy $3\cdot3$ i $2\cdot2$ (ale 9+4+11>23) lub $3\cdot2$ i $3\cdot2$ i wtedy 6+6+11=23. Zatem Mateusz ma 11 lat. Za rozpatrywanie większej liczby przypadków odejmujemy 3 pkt. Za brak systematycznej reguły w sprawdzaniu odejmujemy 1 pkt. Za niesprawdzenie jakiejś możliwości (i dobrej odpowiedzi) przyznajemy maksymalnie 4 pkt.

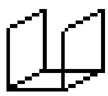
4. Kiedy p równoległych przecina q równoległych, każda linia z pierwszej grupy przecina każdą z drugiej i powstaje $p\cdot q$ punktów przecięcia. Mamy 4 grupy linii równoległych, czyli 6 par nierównoległych kierunków. Liczba przecięć jest więc sumą sześciu składników $20\cdot30 + 20\cdot40 + 20\cdot50+30\cdot40+30\cdot50+40\cdot50 = 600+800+1000+1200+1500+2000 = 7100$.

5. Z treści wiemy, że $^{1}/_{a} = 3$, skąd $a = {}^{1}/_{3}$. Dalej $^{1}/_{3}+{}^{1}/_{b} = 3={}^{9}/_{3}$, skąd $^{1}/_{b} = {}^{8}/_{3}$, czyli $b={}^{3}/_{8}$. I dalej $^{3}/_{8}+{}^{1}/c = 3={}^{24}/_{8}$, skąd $^{1}/_{c} = {}^{21}/_{8}$, a wtedy $c={}^{8}/_{21}$. Szukany iloczyn to $^{1}/_{3}\cdot{}^{3}/_{8}\cdot{}^{8}/_{21} = {}^{1}/_{21}$.



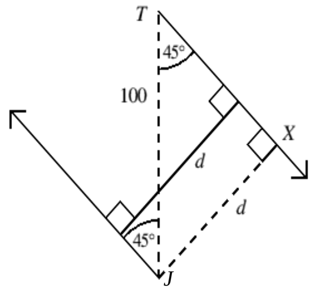
6. Możliwe do pokolorowania pary zawierające kwadrat A to AD, AE, AF, AG, a niezawierające A to BD, BG, DE i EG. Kolorowane trójki muszą zawierać A i są dwie możliwości: ADE i AEG. Czwórek i większych liczb być nie może. To daje 10 możliwości. Za opuszczenie jakiegoś przypadku przyznajemy maksimum 3 pkt. Za brak określenia reguły systematycznego sprawdzania (przy poprawnej odpowiedzi) odejmujemy 2 pkt.

7. Iloczyn kilku czynników jest zerem, wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z nich jest zerem. Pierwszy nawias daje wartość zero dla x=-2, drugi dla 3 lub -3, trzeci ma zawsze wartość dodatnią, a czwarty zeruje się dla x=-1. Zatem równanie spełniają cztery liczby. Za podanie pełnej odpowiedzi ze sprawdzeniem, ale bez rozumowania, z którego wynika, że innych pierwiastków nie ma, przyznajemy 3 pkt.



8. Każda siatka z rysunku ma trzy ściany białe i trzy szare. W takim wypadku są tylko dwie możliwości: albo ściany szare spotykają się w jednym wierzchołku, albo nie (wtedy sześcian składa się z dwóch splecionych jednokolorowych figur przypominających U – patrz rysunek). Żadna siatka z rysunku nie daje sześcianu, w którego wierzchołku schodzą się 3 szare kwadraty, dlatego wszystkie te sześciany są jednakowe.

9. Przekątne prostokąta mają jednakowe długości (uzasadnienie np. z przystawania trójkątów; jeśli uczeń tego nie pokaże od razu, powinien to zrobić na koniec na prośbę jury, jeśli nie potrafi, odejmujemy 4 pkt). Niech boki prostokąta mają długości x i y. Wtedy xy=120 oraz $x+y$=23. Z twierdzenia Pitagorasa kwadrat długość przekątnej to $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, czyli 289. Długość przekątnej to $\sqrt{289} = 17$.



10. Tankowiec i jacht płyną po prostych równoległych w przeciwnych kierunkach, pod kątem 45° do linii SN. Niech majtek na bocianim gnieździe jachtu patrzy stale w kierunku prostopadłym do kursu. W pewnym momencie musi zobaczyć, jak mija ich tankowiec. Będą wtedy w odległości d – najkrótszej jaka łączy punkty na dwóch prostych równoległych. Ponieważ trójkąt TXJ jest równoramienny prostokątny, z twierdzenia Pitagorasa $d^2+d^2=100^2$, czyli $d=50\sqrt{2}$. Za obliczenie odległości linii bez uzasadnienia, że statki znajdą się kiedyś „naprzeciw siebie" przyznajemy 4 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

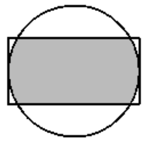
1) Jasiek powiedział: Kiedy miałem 3 lata, mój ojciec był o 5 lat starszy od mojej mamy. Gdy miałem 9 lat moja mama miała 37 lat. Przed dwoma laty mój ojciec obchodził jubileusz 60-lecia. Ile lat ma Jasiek?

2) Ile liczb od 1 do 2014 jest podzielnych jednocześnie przez 20 i 14?

3) Przekątne równoległoboku o obwodzie 40 cm dzielą go na cztery trójkąty. Różnica obwodów dwóch z tych trójkątów wynosi 5 cm. Oblicz długości boków równoległoboku.

4) Liczby dodatnie a, b, c, d są takie, że $ab = 2$, $bc = 3$, $cd = 4$ i $de = 5$. Jaką wartość ma $^e/_a$?

5) Na rysunku przedstawiono prostokąt o wymiarach 6×12 i współśrodkowy z nim okrąg. Krótsze boku prostokąta są styczne do okręgu. Oblicz pole części wspólnej tych figur.



6) Ile wynosi p, jeśli p% liczby $p + 4$ wynosi $\frac{1}{4}p$?

7) Beata maluje biały sześcian o krawędzi 2. Każdą ścianę albo pozostawia pustą, albo rysuje na niej odcinek łączący środki krawędzi (przeciwległych lub sąsiednich). Jaką najdłuższą nieprzerwaną linię może poprowadzić w ten sposób Beata na sześcianie?

8) Dla jakich wartości parametrów a i b równanie $xa + b = 3x - 6$ ma nieskończenie wiele pierwiastków?

9) Dla jakiej wartości liczby całkowitej k, wyrażenie $\frac{k^2+50}{k+5}$ też ma wartość całkowitą?

10) Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $^1/a^2 + {}^1/b^2 = 1$, to $a^4+b^4 \geq (a+b)^2$.

EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

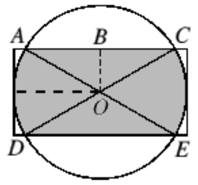
1. Różnica wieku rodziców nigdy się nie zmienia, więc gdy Jasiek miał 9 lat, mama miała 37, a tato 42. Teraz tato ma 62 lata, co oznacza, że Jasiek miał 9 lat 20 lat temu, czyli teraz ma 29 lat. Za bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt.

2. Liczba dzieli się jednocześnie przez 20 i 14 wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez 140 (ich NWW). Co 140-sta liczba naturalna dzieli się przez 140, czyli takich liczb jest [2014/140] = 14. Za zliczanie „na piechotę” odejmujemy 3 pkt.

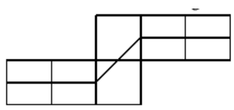
3. Skoro obwód wynosi 40 cm, to suma dwóch sąsiednich boków 20 cm. Przekątne w równoległoboku połowią się (uzasadnienie np. z przystawania trójkątów; jeśli uczeń tego nie pokaże od razu, powinien to zrobić na koniec na prośbę jury, jeśli nie potrafi, odejmujemy 4 pkt), więc różnica obwodów trójkątów musi być różnicą długości boków równoległoboku. Skoro jeden jest dłuższy od drugiego o 5, to $x+x+5=20$, skąd $2x=15$. Zatem jeden bok ma długość 7,5cm, a drugi 12,5cm.

4. Z czwartej równości mamy $d = {}^{5}/_{e}$. Wtedy z trzeciej równości mamy $c\cdot{}^{5}/_{e} = 4$, czyli $c = {}^{4e}/_{5}$. Wtedy z drugiej równości mamy $b\cdot{}^{4e}/_{5} = 3$, czyli $b = {}^{15}/_{4e}$. Ostatecznie z pierwszej równości mamy $a\cdot{}^{15}/_{4e} = 2$, czyli ${}^{a}/_{e} = {}^{8}/_{15}$.

5. Średnica koła ma długość 12, wiec promień 6. Odległość środka koła od dłuższego boku prostokąta wynosi 3. Średnice AE i CD dzielą cześć wspólną figur na dwa wycinki koła i dwa trójkąty równoramienne. Kąt AOB ma miarę 60° (połówka trójkąta równobocznego, AO=6, OB.=3), zatem $|AB|=3\sqrt{3}$ i pole obu trójkątów to $2\cdot½\cdot6\sqrt{3}\cdot3 = 18\sqrt{3}$. Miara kata AOD to 60° (kąt przyległy do 120°), więc oba wycinki stanowią ${}^{1}/_{3}$ koła i mają łącznie pole ${}^{1}/_{3}\cdot\pi\cdot6^2 = 12\pi$. Zacieniowane pole to $12\pi+18\sqrt{3}$.



6. Z treści zadania wynika, że ${}^{p}/_{100}(p+4) = ¼p$, co jest równoważne równaniu $p(p+4) = 25p$ i dalej $p^2–21p=0$, czyli $p(p-21) = 0$, skąd p=0 lub p=21. Za pominięcie odpowiedzi p=0 przyznajemy maksymalnie 6 pkt. Za rozwiązywanie równania kwadratowego z delty odejmujemy ponadto 2 pkt.



7. Na każdej ścianie Beata rysuje albo odcinek o długości 2, albo $\sqrt{2}$. Aby otrzymać najdłuższą możliwą linię, powinna narysować odcinki na jak największej liczbie ścian (najlepiej na wszystkich) i jak najwięcej z nich powinno mieć długość 2. Gdyby rysowała tylko odcinki długości 2, jej linia już po 4 krokach zamknie się w pętlę o długości 8, a dwie ściany będą puste. Jeśli raz wykorzysta odcinek $\sqrt{2}$, narysuje linię 2-2-2-$\sqrt{2}$-2 i powróci do już pomalowanej ściany, uzyskując długość $8+\sqrt{2}$, ale zostawi jedną ścianę pustą. Najdłuższą linię Beata uzyska, wykorzystując odcinek $\sqrt{2}$ dwukrotnie. Jest to możliwe, co pokazuje rysunek. Linia ma długość $8+2\sqrt{2}$. Za odpowiedź bez uzasadnienia, że inne możliwości dają krótsze linie, przyznajemy 3 pkt.

8. Wykresem lewej i prawej strony równania jest prosta. Jeśli dwie proste mają więcej niż dwa punkty wspólne, to się pokrywają. Dlatego obie strony muszą przedstawiać tę samą prostą, czyli a=3, b=-6. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie, w szczególności za przeprowadzanie obliczeń, odejmujemy 4 pkt.

9. Oczywiście k nie może być równe 5. Dla pozostałych liczb podane wyrażenie można zapisać w postaci $\frac{k^2-25}{k+5}+\frac{75}{k+5}=k-5+\frac{75}{k+5}$. Aby było ono całkowite, k+5 musi być całkowitym dzielnikiem 75, czyli jedną z liczb {±1, ±3, ±5, ±15, ±25, ±75}. Stąd k należy do zbioru {-80, -30, -20, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 10, 20, 70}. Za pominięcie jednego przypadku przyznajemy 4 pkt. Za poprawną odpowiedź bez uzasadnienia, że wyczerpuje ona wszystkie możliwości przyznajemy 3 pkt.

10. Warunek ${}^{1}/a^2 + {}^{1}/b^2 = 1$ jest równoważny warunkowi $a^2+b^2 = a^2b^2$. Mamy $a^4+b^4– (a+b)^2 = a^4+b^4– (a^2+b^2+2ab) = a^4+b^4– 2(a^2+b^2) + a^2 + b^2 – 2ab = a^4+b^4– 2a^2b^2+a^2+b^2– 2ab = (a^2–b^2)^2+(a–b)^2$, a to jest nieujemne jako suma kwadratów, co dowodzi tezę.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1) Dla jakiej cyfry X liczba $10^{2014}+X$ jest podzielna przez 9?

2) Jakie pary liczb naturalnych (dopuszczamy także liczbę zero) mają sumę równą 150, a ich największy wspólny dzielnik wynosi 15?

3) Dla jakich wartości parametrów a i b równanie $ax+2 = -2(4x–1)+b$ nie ma pierwiastków?

4) W dodawaniu nie występuje cyfra zero, a każda litera zastępuje inną cyfrę. Ile wynosi $T+H+I+S$?

$$\begin{array}{r} T\,H\,I\,S \\ +\quad I\,S \\ \hline 2\,0\,1\,4 \end{array}$$

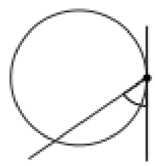
5) Stosunek miar kątów pewnego trójkąta wynosi 1:2:3, a najkrótszy bok ma długość 1. Oblicz długości pozostałych boków.

6) Wiadomo, że $\dfrac{3x+y}{x-3y}=-1$. Jaka jest wartość wyrażenia $\dfrac{x+3y}{3x-y}$?

7) Dany jest prostokąt, którego przekątna ma długość $\sqrt{50}$, a pole wynosi 9. Oblicz jego obwód.

8) Jaka jest najmniejsza liczba całkowita dodatnia, która dzieli się przez 13, ma sumę cyfr równą 13 i której dwie ostatnie cyfry tworzą liczbą 13?

9) Kąt dopisany do okręgu to kąt o wierzchołku na okręgu, którego ramionami są styczna do okręgu w wierzchołku kąta i dowolna cięciwa (patrz rysunek). Udowodnij twierdzenie o kącie dopisanym, które mówi, że kąt dopisany do okręgu jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku.



10) Beata napisała 10 kolejnych liczb całkowitych, zaczynając od pewnej liczby dwucyfrowej. Okazało się, że żadna z tych liczb nie ma sumy cyfr podzielnej przez 7. Jaką najmniejszą liczbę zapisała Beata?

EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Liczba dzieli się przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr dzieli się przez 9 (za użycie implikacji odejmujemy 2 pkt – implikacja nie daje cechy podzielności). Pierwszy składnik zapisuje się jako 1 i 2014 zer. Zatem X=8.

2. Każda z szukanych liczb w parze musi być wielokrotnością 15 i nie może być większa niż 150. Mamy zatem możliwe pary 0+150, 15+135, 30+120, 45+105, 60+90, 75+75 i dalej pary różnią się już tylko kolejnością dodawania (można je rozpatrywać jako inne, ale nie wymagamy tego). Jednak tylko w przypadku dwóch par ich NWD wynosi 15. Można też uznać, ze takich par jest cztery, uwzględniając kolejność: (15, 135), (45, 105), (105, 45) i (135, 15).

3. Wykresem lewej i prawej strony równania jest prosta. Jeśli dwie proste nie mają punktów wspólnych, to są równoległe (ale się nie pokrywają), to znaczy współczynniki przy x po obu stronach muszą być takie same (równoległość), a wyrazy wolne muszą być inne (brak pokrywania). Zatem a=-8 i $b\neq 2$. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie, w szczególności za przeprowadzanie obliczeń, odejmujemy 4 pkt.

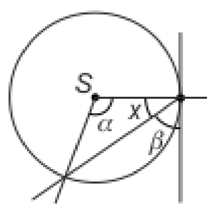
4. S musi być równe 2 lub 7 (bo 2S kończy się na 4). W rzędzie dziesiątek wyniku stoi nieparzyste 1, więc musiało nastąpić przeniesienie (bo I+I dałoby cyfrę parzystą). Zatem S=7. Skoro I nie jest zerem, musi być równe 5, aby dało 1 w rzędzie dziesiątek wyniku. Mamy zatem znowu przeniesienie do rzędu setek. Stąd H=9 i T=1. Zatem szukana suma to 1+9+5+7 = 22.

5. Oznaczmy miarę najmniejszego kąta przez x. Wtedy pozostałe mają miary 2x i 3x. Suma kątów tego trójkąta wynosi 6x i jest równa 180°. Zatem x = 30°, 2x = 60°, 3x = 90°. Mamy więc do czynienia z połówką trójkąta równobocznego, w którym bok długości 1 leży naprzeciw kąta 30° (za przyjęcie tego bez uzasadnienia odejmujemy 2 pkt), więc jest połówką boku trójkąta równobocznego. Najdłuższy bok ma zatem długość 2, a średni $\sqrt{3}$.

6. Z pierwszej równości widać, że licznik i mianownik to liczby przeciwne, zatem $3x+y = -x+3y$. Stąd $4x=2y$, tzn. $y=2x$. Podstawiając do drugiej równości, otrzymamy $^{7x}/_{x} = 7$. Za bardziej skomplikowane, ale poprawne rachunki, odejmujemy 2 pkt.

7. Oznaczmy boki prostokąta a i b. Mamy $a^2+b^2 = 50$ oraz $ab = 9$. Obie strony drugiego równania mnożymy przez 2 i dodajemy do pierwszego. Otrzymujemy $(a+b)^2 = 68$, czyli obwód wynosi $2\sqrt{68}$.

8. Nie może być to liczba jedno- ani dwucyfrowa (za brak uzasadnienia odejmujemy 1 pkt). Nie może to być liczba trzycyfrowa, bo musiałoby to być 913, a ta liczba nie dzieli się przez 13. Nie może być to liczba czterocyfrowa, bo suma dwóch początkowych cyfr musiałaby być 9 (kolejna możliwość to 22, ale dwie cyfry dadzą góra 18), a liczby 9000, 8100, 1800, 7200, 2700, 6300, 3600, 5400 i 4500 nie są podzielne przez 13 (za pominięcie choćby jednego przypadku odejmujemy 4 pkt). Wśród liczb pięciocyfrowych najmniejsza o sumie początkowych trzech cyfr 9 to 10800, ale ta liczba nie dzieli się przez 13. Kolejna to 11700, a ponieważ $117 = 9\cdot 13$, liczba 11700 jest podzielna przez 13. Szukaną liczbą jest więc 11713.



9. Zachodzi $\alpha+2x = 180°$ (suma kątów trójkąta) oraz $\beta+x = 90°$ (prostopadłość promienia do stycznej). Stąd $\alpha=2\beta$.

10. W dziesiątce kolejnych liczb dwucyfrowych zawsze znajduje się taka, której suma cyfr jest podzielna przez 7 (za brak uzasadnienia odejmujemy 4 pkt – wystarczy sprawdzić przypadki, gdy wielokrotności 10 występują w ciągu na 4 lub 5 miejscu, bo w pozostałych przypadkach sumy cyfr dają kolejne 7 liczb, a wśród nich zawsze jest wielokrotność 7). Zatem niektóre liczby Beaty musiały być trzycyfrowe. Ostatnią liczbą dwucyfrową o sumie cyfr podzielnej przez 7 jest 95. Zatem najmniejsza liczba, od której mógł zacząć się ciąg Beaty to 96. Rzeczywiście liczby od 96 do 105 mają sumy cyfr niepodzielne przez 7.