DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1) W pizzerii „Camorra” pizza Margarita na cieście o cienkim spodzie o średnicy 30 cm sprzedawana jest w cenie 30 zł, a o średnicy 40 cm w cenie 40 zł. Który zakup lepiej się opłaca?

2) Pierwszy kran napełnia basen w ciągu 2 godzin, a drugi w ciągu 4 godzin. Napełniony basen opróżnia się przez otwór spustowy w ciągu 3 godzin. Napełnianie pustego basenu rozpoczęto, odkręcając jednocześnie oba krany, jednak wcześniej pracownik obsługi zapomniał zakręcić zawór spustowy. Jak długo będzie napełniał się basen?

3) Czy istnieje trójkąt o bokach długości 2007^{2017}, 2008^{2018}, 2009^{2019}?

4) W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny o całkowitoliczbowych wymiarach. Basen w Hydropolu ma powierzchnię 240 m^2, a basen w Hydroluxie ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i o 2 m szerszy niż w Hydropolu. Jakie wymiary mogą mieć baseny w tych hotelach?

5) Okrąg wpisany w trójkąt równoramienny ma promień 2, a okrąg styczny do dwóch ramion tego trójkąta i do okręgu wpisanego w ten trójkąt ma promień 1. Ile wynosi pole tego trójkąta?

6) Na skwerze zakwitły 3 krzewy w kolorach: białym, żółtym i czerwonym. Liczba wszystkich kwiatów była dwa razy większa od liczby kwiatów białych. Po tygodniu opadło 6 kwiatów i wtedy suma wszystkich kwiatów na krzewach była dwa razy większa od liczby kwiatów żółtych. Po kolejnym tygodniu opadło 8 kwiatów i wtedy w sumie na krzewach było dwa razy więcej wszystkich kwiatów niż kwiatów czerwonych, a liczby kwiatów poszczególnych kolorów wyrażały się kolejnymi liczbami naturalnymi. Ile kwiatów poszczególnych kolorów było na krzewach na początku?

7) Marian zapomniał czterocyfrowy kod do otwarcia walizki, ale pamięta, że był on liczbą pierwszą o iloczynie cyfr 243. Ile co najwyżej możliwych kodów musi wypróbować?

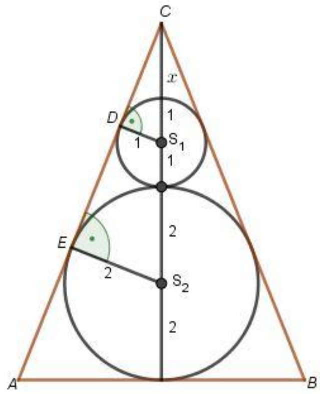
8) Do dwóch jednakowych szklanek mama wlała po 200 ml coca-coli i pepsi-coli. Następnie przelała łyżkę coca-coli do szklanki z pepsi-colą, zawartość starannie wymieszała, a następnie łyżkę tej mieszanki przelała z powrotem do szklanki z coca-colą. Czego było wówczas więcej: coca-coli w pepsi-coli czy pepsi-coli w coca-coli?

9) Czy suma sześcianów liczb od 1 do 2018 dzieli się przez 2019?

10) Jaka jest najmniejsza liczba naturalna posiadająca 64 różne dzielniki?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. I sp. Pizzę zjadamy na całej jej powierzchni. Cena 1 cm^2 pizzy małej wynosi $30/30^2\pi = 1/30\pi > 1/100$ zł = 1 gr, a pizzy dużej $40/40^2\pi = 1/40\pi < 1/100$ zł = 1 gr, więc duża pizza wychodzi taniej. II sp. Jeśli jej promień pizzy r zwiększy się o 10 cm, to nowa powierzchnia wyniesie $\pi(r+10)^2 = \pi r^2 + \pi(20r+100)$, czyli wzrośnie o $\pi(20r+100)$, co dla $r = 30$ cm daje wzrost o ponad 2100 cm^2. Za każdy dodatkowy cm^2 pizzy dopłacamy więc $10/2100 \approx 0{,}0047$ zł, czyli mniej niż pół grosza. Zatem każdy dodatkowy centymetr dużego placka jest ponad 2 razy tańszy niż w małym placku.
2. Pierwszy kran w ciągu godziny napełnia $^1/_2$ basenu, a drugi $^1/_4$. Natomiast przez otwór spustowy w ciągu godziny wypływa ilość wody stanowiąca $^1/_3$ objętości basenu. Załóżmy, że po otwarciu obu kranów i nie zamknięciu otworu spustowego basen napełnia się w ciągu x godzin, czyli w godzinę napełnia się jego $^1/_x$ część. Zatem $^1/_x = {}^1/_2 + {}^1/_4 - {}^1/_3 = {}^5/_{12}$. Stąd $x = 2^2/_5$, czyli basen napełni się w ciągu 2 godzin i 24 minut.
3. Jeśli a, b, c oznaczają długości boków trójkąta, to z nierówności trójkąta zachodzi $a+b > c$, $a+c > b$ i $b+c > a$. Przyjmując $a = 2007^{2017}$, $b = 2008^{2018}$, $c = 2009^{2019}$, otrzymujemy natomiast $a+b < c$, bowiem $2007^{2017} + 2008^{2018} < 2 \cdot 2008^{2018} < 2008 \cdot 2008^{2018} = 2008^{2019} < 2009^{2019}$. Stąd wynika, że trójkąt o podanych długościach boków nie istnieje.
4. Z treści zadania dostajemy układ równań $\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ (x+5)(y+2) = 350 \end{cases}$ lub równoważnie $\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ xy + 2x + 5y + 10 = 350 \end{cases}$.
Podstawiając xy z I równania do II, otrzymujemy $240+2x+5y+10=350$ i dalej $2x+5y=100$, czyli $x=50-2{,}5y$. Stąd szerokość $y < 20$ i musi być liczbą parzystą. Mamy więc 9 możliwych rozmiarów basenu w Hydropolu: 2×45, 4×40, 6×35, 8×30, 10×25, 12×20, 14×15, 16×10, 18×5. Jednak dwa ostatnie przypadki musimy odrzucić, bo y jest w nich długością basenu, a nie szerokością i one nie będą spełniały warunków zadania, bo wówczas w Hydroluxie otrzymamy baseny 18×15 i 20×10, co oznacza, że są dłuższe o 2 m, a szersze o 5. Jest zatem 7 możliwych rozmiarów basenów w każdym z hoteli. Za zaliczenie 9 możliwości odejmujemy 5 pkt. Za pominiecie jakiejś przyznajemy 0 pkt.
5. Niech h oznacza wysokość trójkąta i $h = 6 + x$. Trójkąty prostokątne ES_2C i DS_1C są podobne (kk), zatem mają proporcjonalne boki i zachodzi $^2/_{4+x} = {}^1/_{1+x}$. Stąd $x = 2$, czyli $h=8$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta DS_1C, obliczamy $|DC|=2\sqrt{2}$. Trójkąty DS_1C i AFC też są podobne (kk), zatem $|DC|:|DS_1| = |CF|:|AF|$, skąd $|AF| = 2\sqrt{2}$, czyli $|AB|= 4\sqrt{2}$. Pole trójkąta wynosi $^1/_2 \cdot 8 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.



6. Niech b, z, c oznaczają odpowiednio liczby kwiatów białych, żółtych i czerwonych na początku, b_1, z_1, c_1 – liczby kwiatów po tygodniu, a b_2, z_2, c_2 – liczby kwiatów po dwóch tygodniach. Mamy: (*) $b+z+c = 2b$, (**) $b_1+z_1+c_1 = 2z_1 = 2b-6$, (***) $b_2+z_2+c_2 = 2c_2 = 2b-14$. Na koniec liczby kwiatów w poszczególnych kolorach wyrażały się kolejnymi liczbami naturalnymi n, $n+1$, $n+2$. Z (***) $c_2 = b_2+z_2$, więc $c_2 = n+2$ oraz $b_2+z_2+c_2 = 2c_2$, więc $n+(n+1)+(n+2) = 2(n+2)$, stąd $n=1$, zatem $c_2=3$. Dalej z (***) $2c_2 = 2b-14$, więc $b=10$. Z (**) $2z_1 = 2b-16$, czyli $z_1=7$. Z (*) $z+c = 10$, a ponieważ $z_1=7$ i $c_2=3$, więc $z\geq 7$ i $c\geq 3$. Ostatecznie $b=10$, $z=7$, $c=3$. Za poprawną odpowiedź, z której nie wynika, że jest jedyna, przyznajemy 5 pkt.
7. $243 = 3^5$ i jest jednoznacznie iloczynem czterech liczb jednocyfrowych $1\cdot 3\cdot 9\cdot 9$. Istnieje 12 możliwych ustawień tych cyfr w liczbę 4-cyfrową: 1399, 1939, 1993, 3199, 3919, 3991, 9139, 9193, 9319, 9391, 9913, 9931. Ale liczby 1939 i 3199 są podzielne przez 7, 3991 i 9139 przez 13, 9193 przez 29, a 9913 przez 23. Pozostałe liczby są pierwsze, co trzeba sprawdzić, dzieląc je przez liczby pierwsze nie przekraczające ich pierwiastka kwadratowego (czyli w najgorszym wypadku przez wszystkie 2-cyfrowe). Uczeń powinien opisać sposób wykonywania tych sprawdzeń. Za wykonywanie niepotrzebnych dzieleń odejmujemy 3 pkt. Ostatecznie jest 6 możliwych kodów, które Marian musi sprawdzić: 1399, 1993, 3919, 9319, 9391, 9931.
8. Rozpatrzmy dwie sytuacje: Gdyby pepsi coli w coca coli było mniej niż coca coli w pepsi coli, to w obu szklankach naraz byłoby więcej niż 250 ml coca coli, co jest sprzeczne z warunkami zadania. Gdyby zaś pepsi coli w coca coli było więcej niż coca coli w pepsi coli, to w obu szklankach byłoby mniej niż 250 ml coca coli, co też jest sprzeczne z warunkami zadania. Zatem coca coli w pepsi coli jest tyle samo co pepsi coli w coca coli.
9. Zachodzi $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, co oznacza, że suma sześcianów dwóch liczb dzieli się przez sumę tych liczb. W zadaniu liczba składników jest parzysta, więc można je połączyć w pary $(1^3+2018^3) + (2^3+2017^3) + (3^3+2016^3) + \ldots + (1009^3+1010^3)$. Wyrażenie w każdym nawiasie dzieli się przez 2019, zatem ich suma również.
10. 64 dzielniki posiada np. 63. potęga dwójki. Są nimi: $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{63}$. Z potęg liczb pierwszych to jest najmniejsza liczba o 64 dzielnikach. Znacznie mniejsza jest liczba $2^{31}\cdot 3$ i też ma 64 dzielniki. Dzielniki tej liczby są postaci $2^x\cdot 3^y$, gdzie x wybieramy na 32 sposoby (od 0 do 31), a y na 2 sposoby (0 lub 1). Dzielników wychodzi $2\cdot 32=64$. Ale $64 = 4\cdot 16$, więc tyle dzielników będzie miała też liczba $2^{15}\cdot 3^3$. $64 = 2\cdot 2\cdot 16$, więc trzeba też rozważyć liczbę $2^{15}\cdot 3\cdot 5$, a ta jest mniejsza niż poprzednia. $64 = 8\cdot 8$, co prowadzi jeszcze mniejszej liczby $2^7\cdot 3^7$. Trzeba jeszcze rozważyć $64 = 2\cdot 4\cdot 8$ i $64 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 8$, które prowadzą do liczb $2^7\cdot 3\ 5$ i $2^7\cdot 3.5$. Ta ostatnia jest z nich najmniejsza. Pozostają jednak przypadki $64 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 4$ i $64 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, prowadzące do liczb $2^3\cdot 3\ 5\cdot 7\cdot 11$ i $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17$, z których $2^3\cdot 3\ 5\cdot 7\cdot 11$ jest mniejsza i jednocześnie najmniejsza ze wszystkich rozważanych. Uczeń powinien wykonać porównania przez szacowanie (porównywanie czynników), a nie wyliczanie wartości. W przeciwnym razie odejmujemy 2 pkt (przy poprawnej metodzie i wyniku).

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/19

GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1. Dane są okręgi O_1 i O_2 o środkach odpowiednio w punktach P i R styczne zewnętrznie w punkcie C. Prosta AB jest styczna do okręgu O_1 w punkcie A i do O_2 w punkcie B. Jaki jest związek między miarami kątów APC i ABC?

2. Na pokazie prestidigitatorskim Aleks pomyślał pewną liczbę trzycyfrową, której pierwsza i ostatnia cyfra nie były kolejnymi. Zapisał ją od tyłu i odjął mniejszą od większej z tych liczb. Otrzymaną różnicę znowu zapisał od tyłu i tym razem dodał te dwie nowe liczby. Magik natychmiast odgadł liczbę otrzymaną przez Aleksa. Jak to zrobił?

3. W okrąg wpisano trapez o podstawach długości 12 i 16 oraz wysokości 2. Jaki jest promień tego okręgu?

4. Czy liczba $2019^8 – 2014^8$ jest wielokrotnością piątki?

5. Jaki jest obwód prostokąta, którego przekątna ma długość $\sqrt{50}$, a pole wynosi 9?

6. Adam stoi wewnątrz ostrego kąta dwuściennego utworzonego przez dwie pionowe tafle lustra. Chce zaświecić sobie w oczy światłem własnej latarki, ale tak, by odbiło się ono od obu luster. Co ma zrobić?

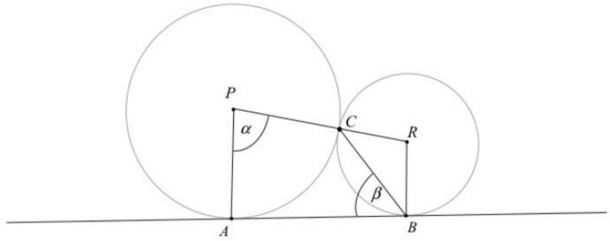
7. Czy liczba 9991 jest pierwsza?

8. W trójkącie o bokach długości a, b, c kąt między bokami długości a i b ma 120 st. Wyprowadź zależność pozwalająca wyliczyć c za pomocą a i b.

9. Czy kwadrat liczby całkowitej może mieć sumę cyfr równą 2018?

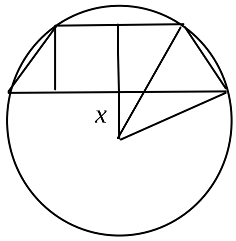
10. Rozwiąż równanie 12x2y3 = 4x4+9y6 w parach liczb rzeczywistych.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/19
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ



1. Z sumy kątów czworokąta *APRB* mamy $|\sphericalangle CRB|$ = 180°–α, a z prostopadłości RB i AB mamy $|\sphericalangle CBR|$ = 90°–β. Z sumy kątów w trójkącie równoramiennym *CRB* mamy α = 180°–2β. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odjąć 2 pkt.

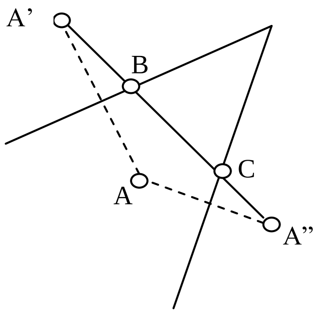
2. Otrzymany wynik to 1089 niezależnie od liczby wybranej przez Aleksa. Niech większa z liczb ma zapis *ABC*. Mamy $100A+10B+C-100C-10B-A = 99A-99C = 99(A-C)$. Wartość w nawiasie jest jednocyfrowa, ale większa niż 1, więc otrzymamy pewną trzycyfrową wielokrotność 99, np. 189, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891. W każdej z nich skrajne cyfry sumują się do 9, a środkowa jest dziewiątką, wiec z ostatniego dodawania dostaniemy 900+9+180 = 1089.



3. Na podstawie symetrii figury złożonej z okręgu i jego dwóch równoległych cięciw wnosimy, że trapez jest równoramienny (za przyjęcie tego bez uzasadnienia odejmujemy 2 pkt). Promień prostopadły do podstaw połowi je. Z twierdzenia Pitagorasa dla dwóch trójkątów prostokątnych otrzymujemy $R^2 = x^2+8^2$ oraz $R^2 = (2+x)^2+6^2$. Przyrównując prawe strony otrzymujemy x=6, a stąd R=10. Trzeba jeszcze uzasadnić, że środek okręgu leży na zewnątrz trapezu (za nierozważenie tej możliwości odejmujemy 4 pkt). przyjęcie tego bez uzasadnienia odejmujemy 4 pkt). Dochodzimy wtedy do sprzeczności, bo analogiczne rozumowanie daje x=8, które byłoby wtedy częścią wysokości równej 2.

4. Można badać ostatnią cyfrę wyniku, ale to żmudne (za taką metodę odjąć 2 pkt, jeśli poprawnie uzasadniono wszystkie przejścia). Ze wzoru na różnicę kwadratów dana liczba jest równa $(2019^4+2014^4)(2019^2+2014^2)(2019+2014)(2019-2014)$, a ostatni czynnik wynosi 5.

5. Niech p jest połową obwodu prostokąta o bokach a i b. Ponieważ $a^2 + b^2 +2ab = (a+b)^2$. Stąd $50 +18 = p^2$, czyli $p = \sqrt{68}$. Obwód prostokąta wynosi $2\sqrt{68}$. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odjąć 2 pkt.



6. Zadanie polega na znalezieniu trójkąta o wierzchołku w punkcie *A* i pozostałych wierzchołkach na ramionach kąta utworzonego przez lustra, bowiem z zasady minimalizacji energii, światło porusza się po najkrótszej możliwej drodze (równoważnie można powołać się na równość kątów padania i odbicia). Aby zminimalizować obwód trójkąta odbijamy punkt *A* w obu ramionach kąta, otrzymując obrazy *A*' i *A*", które łączymy odcinkiem. Punkty przecięcia tego odcinka z ramionami kąta (ozn. *B* i *C*) wyznaczają miejsca na tafli lustra, w które (na wysokości swoich oczu) powinien zaświecić Adam (w każdy z tych punktów, czyli zadanie ma 2 możliwe rozwiązania!). Minimalność obwodu trójkąta *ABC* można stwierdzić, wybierając inne punkty odbicia światła ozn. *D* i *E* (jeden z nich może pokrywać się z *B* lub *C*). Wówczas obwód trójkąta *ADE* jest taki, jak długość łamanej *A*'*DEA*", podczas gdy obwód *ABC*, czyli długość łamanej *A*'*BCA*" jest odcinkiem, zatem najkrótszą możliwą drogą miedzy punktami *A*' i *A*".

7. .
8. .
9. .
10. .

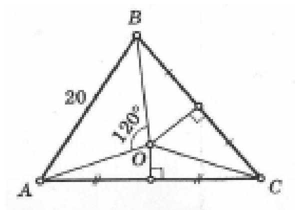
DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/19
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA
MECZ III

1. Dziesięć minut temu wskazówki zegara pokrywały się. Jaki kąt tworzą obecnie?

2. Mama przygotowuje sos vinegret. Odlała szklankę 10% roztworu octu i odparowała z niej wodę tak, że objętość roztworu zmalała o połowę. Jakie jest stężenie nowego roztworu?

3. Ania i Bartek wyszli z domu przy Rynku i zaczęli spacerować wokół Ratusza. Spacerowali tą samą drogą, ale w przeciwnych kierunkach. Gdy minęły 4 minuty, spotkali się po raz pierwszy i wówczas Ania postanowiła iść dwa razy wolniej. Po drugim spotkaniu, które nastąpiło po kolejnych 6 minutach, Bartek zdecydował się iść trzy razy wolniej. Po ilu minutach dojdzie do następnego spotkania?

4. Pewien wielokąt wypukły przecięto wzdłuż prostej. Okazało się, że liczby wierzchołków otrzymanych części oraz początkowego wielokąta to trzy kolejne liczby naturalne. Co to był za wielokąt?



5. Oblicz długość *OC*.

6. Podaj liczbę całkowitą *n*, dla której $n < \frac{1}{4\sqrt{3}-7} < n+1$.

7. W trójkącie równoramiennym ramię jest dwa razy dłuższe od podstawy. Suma długości promieni okręgów wpisanego i opisanego na tym trójkącie jest równa 11. Oblicz obwód tego trójkąta.

8. Łącząc środki kolejnych boków pewnego pięciokąta wypukłego otrzymano łamaną zamkniętą o długości 6,284 cm. Ile wynosi suma długości wszystkich przekątnych tego pięciokąta?

9. Dla jakich wartości *a* równanie $(a^2+1)(x^2+y^2) - 2(a+1)(x+y) + 2(1+2axy) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek?

10. Szklankę w kształcie walca o średnicy 6 cm i wysokości 9 cm napełniono wodą. Następnie przechylono ją tak, że $^1/_3$ wody wylała się. Pod jakim kątem przechylono szklankę?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/19
GIMNAZJA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. W ciągu 10 minut duża wskazówka obróci się o $^1/_6$ kata pełnego, czyli o 60°. W ciągu godziny mała wskazówka zakreśla kąt 30°, zatem w ciągu 10 minut zakreśli $^1/6 \cdot 30° = 5°$. Kąt między wskazówkami wyniesie 55°. Za bardziej skomplikowane rozumowanie odjąć 2 pkt.

2. Na początku ocet stanowił $^1/_{10}$ część objętości roztworu. Objętość ta zmalała dwukrotnie, ale ilość octu się nie zmieniła, wiec stanowi ona teraz $^1/_5$ część objętości roztworu, co oznacza, że jest to roztwór 20-procentowy. Za bardziej skomplikowane rachunki odjąć 1 lub 2 pkt.

3. Niech s – długość drogi wokół Rynku, a v_a i v_b to początkowe prędkości dzieci (za założenie, że są równe, odejmujemy 7 pkt). Z warunków zadania mamy $s = 4v_a + 4v_b = 6\ \ v_a/2 + \ 6v_b$, skąd $v_a = 2v_b$. Niech t oznacza czas do kolejnego spotkania. Mamy wówczas $4(v_a+v_b) = t\ (^1/_2 v_a + {}^1/_3 v_b)$. Podstawiając $v_a = 2v_b$ otrzymujemy $12v_b = t(v_b+{}^1/_3 v_b)$, skąd $t = 9$, więc do następnego spotkania dojdzie po 9 minutach.

4. Niech n – liczba wierzchołków wielokąta, a n–1 i n–2 to liczby wierzchołków powstałych części. Jeśli prosta cięcia przechodziła przez dwa wierzchołki, to $(n–2) + (n–1) = n+2$, skąd $n=5$. Jeśli prosta cięcia przechodzi przez jeden wierzchołek i przecina jeden z boków, to $(n–2) + (n–1) = n+3$, skąd $n=6$. Jeśli prosta cięcia nie przechodzi przez wierzchołki, to $(n–2) + (n–1) = \mathrm{n}+4$, skąd $n=7$. Za pominięcie jednego przypadku przyznajemy 3 pkty, za dwóch – 1 pkt.

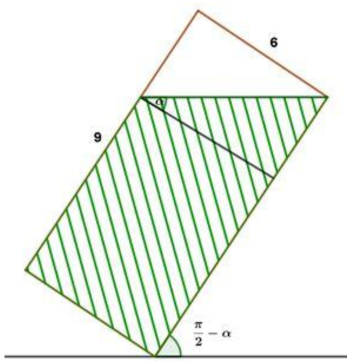
5. Z rysunku wynika, że O jest punktem przecięcia symetralnych boków trójkąta, zatem OC jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie. Trójkąt AOB jest równoramienny, a po opuszczeniu w nim wysokości na bok AB otrzymujemy dwie połówki trójkąta równobocznego o wysokości 10, czyli o boku $|AO|\ |CO| = {}^{20\sqrt{3}}/_3$.

6. Usuwamy niewymierność z mianownika ułamka, otrzymując $x = \dfrac{4\sqrt{3}+7}{48-49}$. Licznik ułamka wynosi $\sqrt{48}+7$ i zawiera się między liczbami $\sqrt{36}+7$ i $\sqrt{49}+7$, czyli między 13 a 14. Zatem liczba przeciwna do licznika mieści się między -14 i -13, skąd n=-14.

7. Niech O oznacza środek okręgu o promieniu R opisanego na trójkącie ABC, W – środek okręgu o promieniu r wpisanego w ten trójkąt, h – wysokość opuszczoną na podstawę AB o długości $2a$, P - spodek tej wysokości, M - punkt styczności okręgu wpisanego z ramieniem AC o długości $4a$. Z równoramienności P jest środkiem podstawy. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ACP mamy $h^2 + a^2 = (4a)^2$, skąd $h = a\sqrt{15}$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie WCM mamy $(h–r)^2 = r^2 + (3a)^2$, skąd $r = {}^1/_5\, a\sqrt{15}$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie APO mamy $R^2 = (h–R)^2 + a^2$, skąd $R = {}^8/_{15} a\sqrt{15}$. Ponieważ $r+R = 11 = {}^{11}/_{15}\, a\sqrt{15}$, dostajemy $a = \sqrt{15}$. Obwód trójkąta wynosi $10a = 10\sqrt{15}$.

8. Każdy odcinek łamanej jest połową pewnej przekątnej, bo jest linią środkową trójkąta, którego ta przekątna jest podstawą. Stąd suma długości przekątnych jest 2 razy większa niż długość łamanej i wynosi 12,568 cm.

9. Równoważnie otrzymujemy $(a^2x^2+2axy+y^2) + (a^2y^2+2axy+x^2) – 2(ay+y) – 2(ay+x)+ 2 = 0$, czyli $(ax+y)^2 – 2(ax+y) + 1 + (ay+x)^2 – 2(ay+x) + 1 = 0$, czyli dalej $(ax+y–1)^2 + (ay+x–1)^2 = 0$ Suma liczb nieujemnych jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy obie są zerami, czyli $ax+y = 1$ i $x+ay = 1$. Ten układ równań przedstawia dwie proste: $y = -ax+1$ i $y = {}^{-1}/_a x+{}^1/_a$. Aby rozwiązanie były jedyne (pierwiastkiem była jedna para liczb), proste nie mogą być równoległe, czyli musi być $a \neq 1$ i $a \neq -1$. Za odpowiedź bez uzasadnienia, że innych możliwych a nie ma, przyznajemy 2 pkt, za uzasadnienia tylko jednego z warunków 4 pkt.



10. Objętość szklanki wynosi $V = 81\pi$. Objętość wylanej wody V_1 równa jest połowie objętości walca o promieniu 3 i wysokości x, skąd $V_1 = {}^1/_2\ 9\pi x = {}^1/_3 V = 27\pi$, czyli x=6. Widać więc, że przekrój walca jest kwadratem i $\alpha = 90°–\alpha = 45°$, zatem szklankę pochylona pod kątem 45° do poziomu.