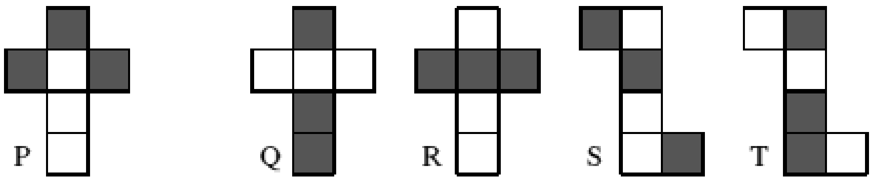
DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA
MECZ I

1) Liczba 145541 jest palindromem, bo nie zmienia wartości czytana w przód i wspak. Ma też tę szczególną własność, że wybrane z niej kolejne liczby dwucyfrowe (14, 45, 55, 54 i 41) są różne. Jaka jest największa liczba palindromiczna zapisana cyframi 1, 2 i 3 o tej samej własności?

2) Janek narysował cztery grupy prostych równoległych (ale żadna prosta z jednej grupy nie była równoległa do prostej z innej grupy) zawierające odpowiednio 20, 30, 40 i 50 prostych. Ile punktów przecięcia jest na jego rysunku?

3) Rysunek przedstawia pięć siatek sześcianu wykonanych z kartonu (ściany mają ten sam kolor po obu stronach papieru). Z siatki P złożono sześcian. Która z pozostałych przedstawia siatkę identycznego sześcianu?



4) Prostokąt ma pole 120 cm^2 i obwód 46 cm. Jakie są długości jego przekątnych?

5) Na Morzu Śródziemnym tankowiec Ropniak znalazł się 100 km na północ od jachtu Wapniak. Tankowiec płynie w kierunku SE z prędkością 20 km/h, a jacht żegluje w kierunku NW z prędkością 10 km/h. Jaka najkrótsza odległość dzieli Ropniaka i Wapniaka?

6) Suma czterech liczb wynosi 1. Pierwsza z nich jest iloczynem pozostałych, suma pierwszych trzech jest równa czwartej, a pierwszych dwóch – iloczynowi pozostałych. Jakie to liczby?

7) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$.

8) Długości trzech równoległych i równoodległych od siebie nawzajem cięciw półokręgu są równe 20, 16 i 8. Jaki jest promień tego półokręgu?

9) W urnie znajduje się m kul niebieskich i n żółtych. Z urny wyciągnięto losowo jedną kulę i sprawdzono, jaki ma kolor. Potem wrzucono ją z powrotem do urny wraz z k nowymi kulami w tym samym kolorze. Wtedy znowu wyciągnięto z urny jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest ona niebieska?

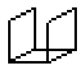
10) Jaka jest największa liczba naturalna n taka, że 10^n dzieli 1005!?

EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Z cyfr 1, 2 i 3 możemy utworzyć 9 różnych liczb dwucyfrowych (11, 22, 33, 12, 21, 13, 31, 23, 32) – jedną cyfrę z trzech wybieramy na 3 sposoby i dwie cyfry z trzech na trzy sposoby (to samo, co odrzucić jedną), ale możemy jeszcze zmieniać kolejność (czyli $3+2\cdot3$) za brak uzasadnienia, że to wszystkie możliwości odemujemy1 pkt. Teraz konstruujemy jak największą liczbę palidromiczną, spełniająca warunki zadania. Najlepiej gdyby zawierała wszystkie 9 liczb dwucyfrowych. Aby liczba była największa, zaczynamy od 3. Kolejne cyfry nie mogą się powtarzać (poza „środkiem” liczby), bo ta sama dwucyfrowa liczba wystąpiłaby dwukrotnie w symetrycznym położeniu. Zatem początek musi być taki 32…23. Trzecią cyfrą nie może być 3, bo powtórzą się liczby 32 i 23, zatem musi być 321…123. Teraz znowu można wpisać największą możliwa cyfrę, czyli 3. Dostajemy liczbę 3213…3123. Liczba 32133123 wyczerpuje już 8 z 9 możliwych liczb dwucyfrowych. Zostaje niewykorzystana liczba 11, jednak może ona stać jedynie w środku, ale wpisanie jej tam powoduje powtórzenia. Dlatego otrzymana do tej pory liczba jest największa z możliwych. Za podanie odpowiedzi bez uzasadnienia przyznajemy 3 pkt.

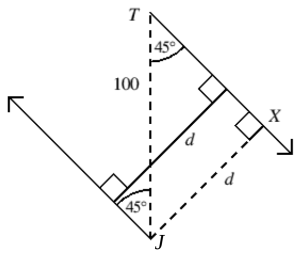
2. Kiedy p równoległych przecina q równoległych, każda linia z pierwszej grupy przecina każdą z drugiej i powstaje $p\cdot q$ punktów przecięcia. Mamy 4 grupy linii równoległych, czyli 6 par nierównoległych kierunków. Liczba przecięć jest więc sumą sześciu składników $20\cdot30 + 20\cdot40 + 20\cdot50+30\cdot40+30\cdot50+40\cdot50 = 600+800+1000+1200+1500+2000 = 7100$.

3. Każda siatka z rysunku ma trzy ściany białe i trzy szare. W takim wypadku są tylko dwie możliwości: albo ściany szare spotykają się w jednym wierzchołku, albo nie (wtedy sześcian składa się z dwóch splecionych jednokolorowych figur przypominających U – patrz rysunek). Żadna siatka z rysunku nie daje sześcianu, w którego wierzchołku schodzą się 3 szare kwadraty, dlatego wszystkie te sześciany są jednakowe.



4. Przekątne prostokąta mają jednakowe długości. Niech boki prostokąta mają długości x i y. Wtedy $xy=120$ oraz $x+y=23$. Z twierdzenia Pitagorasa kwadrat długość przekątnej to $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, czyli 289. Długość przekątnej to $\sqrt{289} = 17$.

5. Tankowiec i jacht płyną po prostych równoległych w przeciwnych kierunkach, pod kątem 45° do linii SN. Niech majtek na bocianim gnieździe jachtu patrzy stale w kierunku prostopadłym do kursu. W pewnym momencie musi zobaczyć, jak mija ich tankowiec. Będą wtedy w odległości d – najkrótszej jaka łączy punkty na dwóch prostych równoległych. Ponieważ trójkąt TXJ jest równoramienny prostokątny, z twierdzenia Pitagorasa $d^2+d^2=100^2$, czyli $d=50\sqrt{2}$. Za obliczenie odległości linii bez uzasadnienia, że statki znajdą się kiedyś „naprzeciw siebie” przyznajemy 4 pkt.



6. Z treści zadania wiemy, że $a = bcd$, $a+b = cd$, $a+b+c = d$ i $a+b+c+d = 1$. Odejmując trzecie równanie od czwartego, otrzymujemy $2d = 1$, czyli $d = \frac{1}{2}$. Następnie podstawiamy za d i odejmujemy drugie równanie od pierwszego. Dostajemy $c = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}c$, skąd $c = {}^1/_3$. Dalej wyliczamy $a = {}^1/_{42}$ i $b={}^1/_7$.

7. Różnicę $a^2+b^2+c^2+3 - 2(a+b+c)$ można zapisać jako $a^2-2a+1 + b^2-2b+1 + c^2-2c+1 = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2$, a to jest nieujemne, co dowodzi tezę. Za bardziej skomplikowane rachunki odejmujemy 2 pkt.

8. Dorysowujemy drugą połówkę okręgu. Niech x oznacza odległość między cięciwami, a y odległość najdłuższej cięciwy od równoległej do niej średnicy okręgu. Łączymy środek okręgu z końcami każdej z cięciw. Powstają trójkąty prostokątne o bokach: $(r, 4, 2x+y)$, $(r, 8, x+y)$ oraz $(r, 10, y)$. Do każdego z nich stosujemy twierdzenie Pitagorasa, otrzymując 3 równania z trzema niewiadomymi. Rozwiązaniem tego układu jest $x=y=\sqrt{6}$ i $r=\sqrt{106}$.

9. Szukane prawdopodobieństwo jest sumą dwóch: P(II kula jest niebieska pod warunkiem, że I była niebieska) + P(II kula jest niebieska pod warunkiem, że I była żółta). Prawdopodobieństwo zdarzenia warunkowego jest iloczynem prawdopodobieństwa warunku i prawdopodobieństwa części wspólnej wyniku i warunku (mnożymy prawdopodobieństwa przejścia wzdłuż kolejnych gałęzi w drzewie probabilistycznym). Mamy zatem:
$$\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m+k}{m+n+k}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n+k}=\frac{m^2+mk+mn}{(m+n)(m+n+k)}=\frac{m(m+n+k)}{(m+n)(m+n+k)}=\frac{m}{m+n}.$$

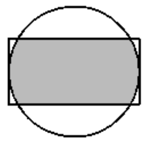
10. Należy stwierdzić, ile jest zer na końcu 1005! Liczba końcowych zer zależy od liczby piątek w rozkładzie na czynniki pierwsze (bo dwójek w silni zawsze jest więcej, wiec dziesiątek będzie tyle, co piątek). Co piąta liczba dzieli się przez 5, co 25-ta dzieli się dwukrotnie, co 125-ta trzykrotnie, co 625-ta czterokrotnie. Zatem piątek w rozkładzie liczby 1005! będzie $[1005/5]+[1005/25]+[1005/125]+[1005/625] = 201+40+8+1 = 250$.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1) Ile liczb od 1 do 2014 jest podzielnych jednocześnie przez 20 i 14?



2) Na rysunku przedstawiono prostokąt o wymiarach 6×12 i współśrodkowy z nim okrąg. Krótsze boku prostokąta są styczne do okręgu. Oblicz pole części wspólnej tych figur.

3) Beata maluje biały sześcian o krawędzi 2. Każdą ścianę albo pozostawia pustą, albo rysuje na niej odcinek łączący środki krawędzi (przeciwległych lub sąsiednich). Jaką najdłuższą nieprzerwaną linię może poprowadzić w ten sposób Beata na sześcianie?

4) Dla jakiej wartości liczby całkowitej k, wyrażenie $\frac{k^2+50}{k+5}$ też ma wartość całkowitą?

5) Dla jakiej wartości parametru m pierwiastek równania $\frac{x+m}{x+1} - \frac{2x-m}{x-1} = -1$ należy do przedziału (-1, 0)?

6) Najdłuższy bok trójkąta ma długość 3, a najkrótszy długość 1. Jakie jest największe możliwe pole tego trójkąta?

7) Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $^1/a^2 + {}^1/b^2 = 1$, to $a^4+b^4 \geq (a+b)^2$.

8) Rysunek przedstawia własności prostych równoległych i antyrównoległych.

Udowodnij, że boki trójkąta spodkowego (tzn. odcinki łączące spodki wysokości pewnego trójkąta) są antyrównoległe do boków wyjściowego trójkąta.

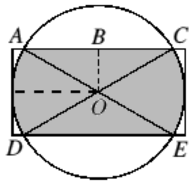
9) Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby: $10-3\sqrt{11}$, $8-3\sqrt{7}$, $5-2\sqrt{6}$, $9-4\sqrt{5}$, $7-4\sqrt{3}$.

10) Udowodnij, że jeśli pierwiastki równania $x^2 + px + q = 0$ są sześcianami pierwiastków równania $x^2 + mx + n = 0$, to $p = m^3 - 3mn$.

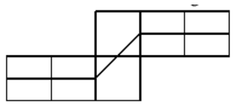
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Liczba dzieli się jednocześnie przez 20 i 14 wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez 140 (ich NWW). Co 140-sta liczba naturalna dzieli się przez 140, czyli takich liczb jest [2014/140] = 14. Za zliczanie „na piechotę” odejmujemy 3 pkt.

2. Średnica koła ma długość 12, wiec promień 6. Odległość środka koła od dłuższego boku prostokąta wynosi 3. Średnice AE i CD dzielą cześć wspólną figur na dwa wycinki koła i dwa trójkąty równoramienne. Kąt AOB ma miarę 60° (połówka trójkąta równobocznego, AO=6, OB.=3), zatem $|AB|=3\sqrt{3}$ i pole obu trójkątów to $2\cdot½\cdot6\sqrt{3}\cdot3 = 18\sqrt{3}$. Miara kata AOD to 60° (kąt przyległy do 120°), więc oba wycinki stanowią $^1/_3$ koła i mają łącznie pole $^1/_3\cdot\pi\cdot6^2 = 12\pi$. Zacieniowane pole to $12\pi+18\sqrt{3}$.



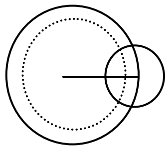
3. Na każdej ścianie Beata rysuje albo odcinek o długości 2, albo √2. Aby otrzymać najdłuższą możliwą linię, powinna narysować odcinki na jak największej liczbie ścian (najlepiej na wszystkich) i jak najwięcej z nich powinno mieć długość 2. Gdyby rysowała tylko odcinki długości 2, jej linia już po 4 krokach zamknie się w pętlę o długości 8, a dwie ściany będą puste. Jeśli raz wykorzysta odcinek √2, narysuje linię 2-2-2-√2-2 i powróci do już pomalowanej ściany, uzyskując długość 8+√2, ale zostawi jedną ścianę pustą. Najdłuższą linię Beata uzyska, wykorzystując odcinek √2 dwukrotnie. Jest to możliwe, co pokazuje rysunek. Linia ma długość 8+2√2. Za odpowiedź bez uzasadnienia, że inne możliwości dają krótsze linie, przyznajemy 3 pkt.



4. Oczywiście k nie może być równe 5. Dla pozostałych liczb podane wyrażenie można zapisać w postaci $\frac{k^2-25}{k+5}+\frac{75}{k+5}=k-5+\frac{75}{k+5}$. Aby było ono całkowite, k+5 musi być całkowitym dzielnikiem 75, czyli jedną z liczb {±1, ±3, ±5, ±15, ±25, ±75}. Stąd k należy do zbioru {-80, -30, -20, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 10, 20, 70}. Za pominięcie jednego przypadku przyznajemy 4 pkt. Za poprawną odpowiedź bez uzasadnienia, że wyczerpuje ona wszystkie możliwości przyznajemy 3 pkt.

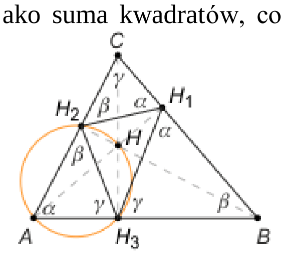
5. Dziedziną równania jest R\{-1, 1}. Mnożymy obie strony równania przez $x^2–1$, otrzymując $(x+m)(x–1) – (2x–m)(x+1) = -(x^2–1)$, które po redukcji jest równoważne równaniu $x(2m–3) = 1$. Równanie to jest sprzeczne dla $m = {}^3/_2$. Natomiast dla pozostałych m otrzymujemy $x = {}^1/_{2m–3}$. Uwzględniając, że w wyjściowym równaniu x nie może być -1 ani 1, pierwiastek wyjściowego równania istnieje dla m różnych od 1, $^3/_2$ i 2 (za nieuwzględnienie dziedziny równania odejmujemy 4 pkt). Aby pierwiastek należał do zadanego przedziału, musi zachodzić $2m–3<0$ oraz $^1/_{2m-3}>-1$, co wobec poprzedniego warunku daje $m < 1$.

6. Aby zmaksymalizować pole trójkąta, trzeba zmaksymalizować sinus kąta między podanymi bokami, czyli zmaksymalizować kąt (bo sinus kąta ostrego jest funkcją rosnącą, a chodzi o kąt ostry – w przeciwnym razie bok długości 3 nie byłby najdłuższy). Niech trzeci bok ma długość $a\le3$. Na rysunku przedstawiono najdłuższy bok trójkąta, a z jego końców zakreślono okręgi – z jednej strony o promieniu 1, a z drugiej 3. Widać, że punkt przecięcia tych okręgów wyznacza największy kąt między bokami 1 i 3. Gdy $a<3$ (okrąg przerywany) punkt przecięcia z okręgiem jednostkowym daje mniejszy kąt między bokami 1 i 3, a więc mniejsze pole.



7. Warunek $^1/a^2 + {}^1/b^2 = 1$ jest równoważny warunkowi $a^2+b^2 = a^2b^2$. Mamy $a^4+b^4– (a+b)^2 = a^4+b^4– (a^2+b^2+2ab) = a^4+b^4– 2(a^2+b^2) + a^2 + b^2 – 2ab = a^4+b^4– 2a^2b^2+a^2+b^2– 2ab = (a^2–b^2)^2+(a–b)^2$, a to jest nieujemne jako suma kwadratów, co dowodzi tezę.

8. Pokażemy, że H_2H_3 jest antyrównoległe do BC. Zauważmy, że na czworokącie AH_3HH_2 można opisać okrąg (kąty proste przy H_2 i H_3). Wówczas kąty AH_2H_3 i AHH_3 są przystające (jako wpisane oparte na tym samym łuku), a ich wspólna miara (z trójkąta prostokątnego AHH_3) wynosi 90°- $|\measuredangle HAH_3|$, co z kolei (z trójkąta prostokątnego ABH_1) jest równe 90° - (90°-β) = β. I dalej $|\measuredangle AH_3H_2| = \gamma$ (z sumy kątów trójkąta AH_3H_2), c.b.d.o.



9. Każda z liczb może być zapisana jako $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$, dla x równych odpowiednio 100, 64, 25, 81 i 49. Wyrażenie to możemy zapisać równoważnie jako $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$, bo $(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})=x-(x-1)=1$. Funkcja $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$ jest rosnąca, zatem jej odwrotność $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ jest malejąca. Liczby wystarczy zatem ustawić w kolejności malejących argumentów, czyli 100, 81, 64, 49, 25, co odpowiada rosnącym wartościom $10–3\sqrt{11}$, $9–4\sqrt{5}$, $8–3\sqrt{7}$, $7–4\sqrt{3}$, $5–2\sqrt{6}$.

10. Nazwijmy pierwiastki drugiego równania x i y. Ze wzorów Viete’a suma pierwiastków pierwszego równania wynosi ($-p$), a z treści zadania jest równa $x^3+y^3 = (x+y)(x^2–xy+y^2) = (x+y)[(x+y)^2–3xy]$, a to ostatnie ze wzorów Viete’a jest równe $-m(m^2–3n)$, zatem $p = m^3–3mn$, c.b.d.o.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1) W dodawaniu nie występuje cyfra zero, a każda litera zastępuje inną cyfrę. Ile wynosi $T+H+I+S$?

$$\begin{array}{r} THIS \\ +\quad IS \\ \hline 2014 \end{array}$$

2) Wiadomo, że $\frac{3x+y}{x-3y}=-1$. Jaka jest wartość wyrażenia $\frac{x+3y}{3x-y}$?

3) Ile wynosi obwód prostokąta o przekątnej $\sqrt{50}$ i polu 9?

4) Beata napisała 10 kolejnych liczb całkowitych, zaczynając od pewnej liczby dwucyfrowej. Okazało się, że żadna z tych liczb nie ma sumy cyfr podzielnej przez 7. Jaką najmniejszą liczbę zapisała Beata?

5) Kąt dopisany do okręgu to kąt o wierzchołku na okręgu, którego ramionami są styczna do okręgu w wierzchołku kąta i dowolna cięciwa. Udowodnij twierdzenie o kącie dopisanym, które mówi, że kąt dopisany do okręgu ma taką samą miarę, co kąt wpisany oparty na tym samym łuku.

6) Znajdź wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich ($a < b < c$) spełniające równanie $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=3$.

7) Czy długości odcinków, na które dzielą się dwie przecinające się cięciwy okręgu mogą wyrażać się czterema kolejnymi liczbami naturalnymi?

8) Linia średnia w trapezie to odcinek łączący środki ramion. W pewnym trapezie równoramiennym linia średnia ma długość 5 i dzieli ten trapez na części, których pola są w stosunku 7:13. Wiadomo, że w ten trapez można wpisać okrąg. Oblicz jego wysokość.

9) Ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba cyfr liczby 1996^{1996}?

10) Jaka jest najmniejsza liczba naturalna n taka, że wartość iloczynu $2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot \ldots \cdot 2^{\frac{2n+1}{7}}$ przekracza 1000?

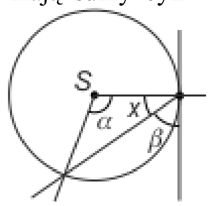
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. S musi być równe 2 lub 7 (bo $2S$ kończy się na 4). W rzędzie dziesiątek wyniku stoi nieparzyste 1, więc musiało nastąpić przeniesienie (bo $I+I$ dałoby cyfrę parzystą). Zatem $S=7$. Skoro I nie jest zerem, musi być równe 5, aby dało 1 w rzędzie dziesiątek wyniku. Mamy zatem znowu przeniesienie do rzędu setek. Stąd $H=9$ i $T=1$, więc szukana suma to 1+9+5+7 = 22.

2. Z pierwszej równości widać, że licznik i mianownik to liczby przeciwne, zatem $3x+y = -x+3y$. Stąd $4x=2y$, tzn. $y=2x$. Podstawiając do drugiej równości, otrzymamy ${}^{7x}/_{x} = 7$. Za dobrw, ale bardziej skomplikowane rachunki, odejmujemy 2 pkt.

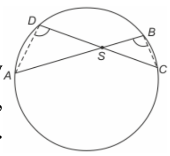
3. Oznaczmy boki prostokąta a i b. Mamy $a^2+b^2 = 50$ oraz $ab = 9$. Obie strony drugiego równania mnożymy przez 2 i dodajemy do pierwszego. Otrzymujemy $(a+b)^2 = 68$, czyli obwód wynosi $2\sqrt{68}$. Trzeba jeszcze sprawdzić, czy taki prostokąt w ogóle istnieje, tzn. czy podany układ równań ma nieujemne rozwiązanie (nie trzeba go rozwiązywać, ale doprowadzić do równania kwadratowego przez podstawienie $a={}^{9}/_{b}$ i przekonać się, że jeden z pierwiastków będzie dodatni). Za brak sprawdzenia tego warunku odejmujemy 4 pkt.

4. W dziesiątce kolejnych liczb dwucyfrowych zawsze znajduje się taka, której suma cyfr jest podzielna przez 7 (za brak uzasadnienia odejmujemy 4 pkt – wystarczy sprawdzić przypadki, gdy wielokrotności 10 występują w ciągu na 4 lub 5 miejscu, bo w pozostałych przypadkach sumy cyfr dają kolejne 7 liczb, a wśród nich zawsze jest wielokrotność 7). Zatem niektóre liczby Beaty musiały być trzycyfrowe. Ostatnią liczbą dwucyfrową o sumie cyfr podzielnej przez 7 jest 95. Zatem najmniejsza liczba, od której mógł zacząć się ciąg Beaty to 96. Rzeczywiście liczby od 96 do 105 mają sumy cyfr niepodzielne przez 7.

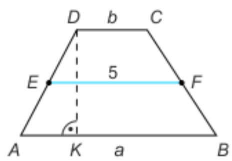


5. Zachodzi $\alpha+2x = 180°$ (suma kątów trójkąta) oraz $\beta+x = 90°$ (prostopadłość promienia do stycznej). Stąd $\alpha=2\beta$. Dalej stosujemy twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym opartym na tym samym łuku, co dowodzi tezę.

6. Dla $a>2$ lewa strona równania nie przekracza ${}^{4}/_{3}\cdot{}^{5}/_{4}\cdot{}^{6}/_{5} = 2$, zatem $a\le 2$. Dla $a=2$ równanie ma postać $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2$ i gdy $b>2$, to lewa strona nie przekracza ${}^{4}/_{3}\cdot{}^{5}/_{4} < 2$, zatem nie ma rozwiązania. Pozostaje $a=1$. Równanie ma wtedy postać $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{2}$ i gdy $b>4$, to lewa strona nie przekracza ${}^{6}/_{5}\cdot{}^{7}/_{6} < {}^{3}/_{2}$. Zatem $b\le 4$. Dla $b=2$ nie otrzymamy całkowitego c, dla $b=3$ wyliczamy $c=8$, a dla $b=4$ wyliczamy $c=5$. Zatem równanie jest spełnione przez dwie trójki liczb (1, 3, 8) i (1, 4. 5). Za podanie odpowiedzi ze sprawdzeniem, ale bez uzasadnienia, że innych możliwości nie ma, przyznajemy 3 pkt.



7. Nie. Zachodzi bowiem twierdzenie o cięciwach okręgu: AB i CD to cięciwy okręgu przecinające się w punkcie S, wtedy $AS\cdot BS = CS\cdot DS$ (trójkąty ADS i BCS są podobne z cechy kkk; kąty S są wierzchołkowe, kąty D i B - wpisane oparte na tym samym łuku i mamy równość proporcji $AS : DS = CS : BS$, co daje tezę). Gdyby długości odcinków cięciw były kolejnymi liczbami naturalnymi, dwie z nich byłyby parzyste i dwie nieparzyste. W równości $ab=cd$ liczby parzyste musiałyby stać po obu stronach równości, ale liczba dwójek w ich rozkładach nie jest taka sama, co daje sprzeczność z jednoznacznością rozkładu na czynniki pierwsze.



8. Długość linii średniej trapezu jest średnią arytmetyczną długości podstaw (uczeń powinien uzasadnić ten fakt, jeśli nie sam, to na prośbę jury; jeśli nie umie, odejmujemy 3 pkt – wystarczy obok dorysować trapez przystający obrócony o 180°). Otrzymujemy układ równań $a+b=10$ i ${}^{(5+b)}/_{(a+5)}={}^{7}/_{13}$. Jego rozwiązaniem jest para (8, 2), czyli $|AK|=3$. Na mocy wpisywalności okręgu i równoramienności trapezu otrzymujemy $|AD|+|BC| = a+b = 10$, czyli $|AD|=|BC|=5$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AKD otrzymujemy $|DK|=4$.

9. Cztery. $1996^{1996}>1000^{1000} = (10^3)^{1000} = 10^{3000}$. Liczba mniejsza od danej to 1 i 3000 zer, czyli ma 3001 cyfr (liczba cyfr jest czterocyfrowa). $1996^{1996}<10000^{2000} = (10^4)^{2000} = 10^{8000}$. Liczba większa od danej to 1 i 8000 zer, czyli ma 8001 cyfr (liczba cyfr jest czterocyfrowa). Liczba cyfr danej liczby jest pomiędzy 3001 i 8001, więc jest czterocyfrowa.

10. Najmniejsze szukane n wynosi 8. Wystarczy, aby wykładnik liczby $2^{\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{2n+1}{7}}$ był równy lub przekroczył 10 (bo $2^{10}=1024>1000$. Wykładnik ten wynosi ${}^{1}/_{7}(1+3+\ldots+2n+1) = {}^{1}/_{7}(n+1)^2$ – wzór na sumę liczb nieparzystych uczeń (na prośbę jury) powinien uzasadnić, a jeśli tego nie potrafi, odejmujemy 4 pkt. Można to zrobić, korzystając z własności ciągu arytmetycznego lub rozumowaniem geometrycznym. Można też przez indukcję – wtedy uczeń powinien powołać się na twierdzenie o indukcji, a wcześniej sprawdzić jego założenia. Dalej rozwiązujemy nierówność ${}^{1}/_{7}(n+1)^2 \ge 10$, skąd $n\ge 7{,}3$. Zatem $n=8$ na pewno wystarczy. Trzeba jeszcze sprawdzić $n=7$ (bo szacowanie było z nawiązką). Wykładnik przy dwójce wynosi wtedy ${}^{64}/_{7} < 9{,}2$, a $2^{9{,}2} < 600$.