DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1) Jaka jest długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o bokach 3, 4, 5?

2) Liczby x i y spełniają równanie $(x-y)^2+(x+y-4)^2=0$. Ile wynosi iloczyn tych liczb?

3) Czy liczba, której zapis dziesiętny jest następujący *aababbab,* gdzie a i b są pewnymi cyframi, jest podzielna przez 11?

4) Jaka jest dwucyfrowa końcówka liczby 2013^2-2013?

5) W dziewięciokącie foremnym narysowano wszystkie przekątne. Ile powstało trójkątów równoramiennych o wierzchołkach w wierzchołkach danego dziewięciokąta?

6) Wśród liczb 5-cyfrowych jest a liczb o iloczynie cyfr równym 25 i b liczb o iloczynie cyfr równym 15. Ile wynosi $^a/_b$?

7) Na wyspach Bergamutach znana jest operacja * o następujących własnościach: $(2x)*y = ½ + (x*y)$, $y^2*x = x^2*y$, $2*2={}^3/_2$. Ile wynosi 32*8?

8) Ile liczb rzeczywistych spełnia równanie $x^{111}+x^{222}+x^{333} = {}^{2013}/_{2014}$?

9) Czy istnieje taki czworokąt, który nie jest rombem, a każda jego przekątna dzieli go na dwa trójkąty równoramienne?

10) Czy istnieje taki ostrosłup o podstawie kwadratowej, który nie jest prawidłowy, ale każda jego ściana boczna jest trójkątem równoramiennym?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, ten trójkąt jest prostokątny (za powołanie się na twierdzenie Pitagorasa odejmujemy 2 pkt). Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie wpisanym w okrąg opartym na średnicy (za powołanie się na twierdzenie proste odejmujemy 2 pkt, chyba ze już odjęto je poprzednio), przeciwprostokątną trójkąta jest średnica okręgu, więc jego promień wynosi 2,5.

2. Składniki po lewej stronie są nieujemne, więc oba muszą być zerami. Rozwiązując odpowiedni układ równań otrzymujemy jeden pierwiastek (2, 2). Szukany iloczyn wynosi 4.

3. 2. Liczbę *aababbab* można zapisać jako $10^7a+10^6a+10^5b+10^4a+10^3b+10^2b+10a+b = 11010010a+101101b$, a oba współczynniki liczbowe dzielą się przez 11 (brak uzasadnienia tych podzielności to 2 pkt mniej za każdą).

4. Przedstawiamy daną liczbę jako $2013(2013–1) = 2013\cdot 2012$. O dwucyfrowej końcówce iloczynu decyduje tylko iloczyn dwucyfrowych końcówek czynników, co wynika z algorytmu mnożenia pisemnego (za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 3 pkt), zatem mamy $13\cdot 12=156$, czyli szukana końcówka to 56.

5. Wśród trójkątów utworzonych przez przekątne są 3 trójkąty równoboczne. Dla pozostałych trójkątów równoramiennych możemy wybrać na 9 sposobów wierzchołek 9-kąta, w którym umieścimy wierzchołek trójkąta i wtedy są trzy możliwości umieszczenia na pozostałych wierzchołkach 9-kąta podstawy trójkąta (uzasadnienie tego faktu warte jest 5 pkt). Łącznie otrzymujemy $3+9\cdot 3=30$ trójkątów równoramiennych.

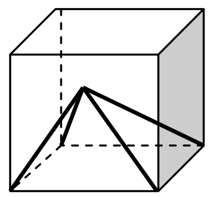
6. Liczby z iloczynem cyfr 25 muszą składać się z dwóch piątek i trzech jedynek (uzasadnienie za 2 pkt). Zatem a to liczba możliwych rozmieszczeń trzech jedynek na pięciu miejscach, Liczby z iloczynem cyfr 15 muszą składać się z trójki, piątki i trzech jedynek (uzasadnienie za 2 pkt, chyba że odjęto je poprzednio). Zatem b to liczba możliwych rozmieszczeń trzech jedynek na pięciu miejscach, a potem jeszcze wybrania z pozostałych miejsc jednego miejsca dla piątki, co można zrobić na 2 sposoby. Zatem b jest dwa razy większe od a i $^{a}/_{b} = {}^{1}/_{2}$. Za bardziej skomplikowane rozumowanie, w tym za obliczanie liczb a i b odejmujemy 2 pkt.

7. Z I warunku $32*8 = ½+16*8 = {}^{2}/_{2}+8*8 = {}^{3}/_{2}+4*8$. Z II warunku dla y=2 i x=8 mamy $4*8 = 64*2$. Stosując wielokrotnie warunek I otrzymamy $64*2 = ½+32*2 = {}^{2}/_{2}+16*2 = \ldots = {}^{5}/_{2}+2*2$. Zatem $32*8 = {}^{3}/_{2}+4*8 = {}^{3}/_{2}+64*8 = {}^{8}/_{2}+2*2 = {}^{11}/_{2}$.

8. Dla x<-1 lewa strona jest ujemna, bo $|x^{333}| > |x^{222}|$ i $x^{111}<0$, więc równanie nie ma ujemnych pierwiastków. Dla x z przedziału <-1, 0) jest podobnie, bo $|x^{222}|<|x^{111}|$ i $x^{333}<0$. Dla $x\geq 0$ lewa strona jest funkcją rosnącą i przyjmuje wartości od 0 do ∞, więc wartość $^{2013}/_{2014}$ przyjmie raz.

9. Tak. Rysujemy trzy promienie okręgu co np. 30° i łączymy kolejno ich końce leżące na okręgu. Powstaje deltoid nie będący rombem o żądanej własności.

10. Tak. Jako podstawę ostrosłupa bierzemy dolną ścianę sześcianu, a jako wierzchołek – punkt na ścianie frontowej tego sześcianu, który po połączeniu z wierzchołkami dolnej podstawy tworzy na tej ścianie trójkąt równoboczny. Taki ostrosłup nie jest prawidłowy, bo spodek wysokości nie znajduje się w środku podstawy (za brak sprawdzenia tego warunku odejmujemy 3 pkt), ale ściany boczne są trójkątami równoramiennymi, co łatwo sprawdzić.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1) Jaka jest długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt o bokach 3, 4, 5?

2) Liczby a, b, c są dodatnie i spełniają warunki: $\frac{c}{a-b}=3$ oraz $\frac{c}{a+b}=2$. Która z tych liczb jest najmniejsza?

3) Udowodnij, że liczba o zapisie dziesiętnym $a_1a_2a_3...a_{99}$ dzieli się przez 37 wtedy i tylko wtedy, gdy 37 dzieli sumę jej trzycyfrowych odcinków (tzn. liczb $a_1a_2a_3$, $a_4a_5a_6$, ..., $a_{97}a_{98}a_{99}$).

4) W sieci sklepów „Boża krówka" wszystkie towary kosztują całkowitą liczbę złotych i 99 gr. Natalia wydała na zakupy 65,76 zł. Ile towarów kupiła?

5) W szufladzie ze skarpetkami Franciszek trzyma pojedyncze skarpetki w kolorze kanarkowym – tych jest 10, a pozostałe są w kolorze papuzim. Franciszek wyciąga skarpety bez zaglądania do szuflady. Liczba sztuk skarpet, które musi wyciągnąć, aby mieć pewność, że są wśród nich co najmniej 2 kanarkowe jest dwa razy większa niż liczba sztuk skarpet, które musi wyciągnąć, aby mieć pewność, że są wśród nich co najmniej dwie papuzie. Ile sztuk skarpet jest w szufladzie Franciszka?

6) Na papierze w kratkę narysowano prostokąt „po kratkach". Liczba kratek dotykających brzegu jest taka sama, jak liczba kratek nie dotykających brzegu. Ile kratek zawiera ten prostokąt?

7) Niech a, b, c i d będą różnymi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że 12 dzieli liczbę $(a–b)(a–c)(a–d)(b–c)(b–d)(c–d)$.

8) Jeden z czterech rozbójników Alane, Belone, Celine i Delone ukradł złoto Ali-Baby. Po odkryciu rozboju złożyli oświadczenia w dwóch zdaniach. Rozbójnicy dobrze się znają. Niektórzy z nich czasem kłamią, a inni zawsze mówią prawdę. Kłamcy w swoich zeznaniach podali co najmniej jedno zdanie nieprawdziwe. Oto zeznania rozbójników:

Alane:	Belone jest kłamcą.	Celine lub Delone ukradł złoto.
Belone:	Celine jest kłamcą.	Delone lub Alane ukradł złoto.
Celine:	Delone jest kłamcą.	Alane lub Belone ukradł złoto.
Delone:	Alane jest kłamcą.	Belone lub Celine ukradł złoto.

Ile z tych zdań jest prawdziwych?

9) Czy istnieje trójkąt ostrokątny, nierównoramienny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są całkowite?

10) Czy istnieje taki ostrosłup o podstawie będącej pięciokątem foremnym, który nie jest prawidłowy, ale każda jego ściana boczna jest trójkątem równoramiennym?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa, ten trójkąt jest prostokątny (za powołanie się na twierdzenie Pitagorasa odejmujemy 2 pkt). Z tego wynika, że promienie poprowadzone do punktów styczności na przyprostokątnych są do tych przyprostokątnych równoległe (powstaje kwadrat o boku r). Środek okręgu wpisanego leży w przecięciu dwusiecznych kątów, zatem odcinki utworzone na sąsiednich bokach do punktów styczności są równe. Mamy zatem dla przeciwprostokątnej c równość $c = a-r+b-r = (a+b)-2r$, skąd $r=(a+b-c)/2$.

2. Najmniejsze jest b. Z I warunku $a-b>0$, czyli $a>b$. Warunki zadania można zapisać równoważnie jako $2c=6a-6b$ oraz $3c=6a+6b$. Po dodaniu ich stronami mamy $5c=12a$, wiec $c=(12/5)a$, czyli $c>a$.

3. Podkreślony zapis oznacza liczbę złożoną z danych cyfr. Mamy $\underline{a_1a_2a_3...a_{99}} = \underline{a_1a_2a_3}\cdot 10^{96} + \underline{a_4a_5a_6}\cdot 10^{93} + ... + \underline{a_{97}a_{98}a_{99}} = (\underline{a_1a_2a_3} + \underline{a_4a_5a_6} + ... + \underline{a_{97}a_{98}a_{99}}) + (\underline{a_1a_2a_3}\cdot(10^{96}-1) + \underline{a_4a_5a_6}\cdot(10^{93}-1) + ... + \underline{a_{94}a_{96}a_{96}}\cdot(10^3-1))$, a ponieważ liczby postaci $10^{3n}-1$ to w zapisie dziesiętnym $3n$ dziewiątek, dzielą się one przez 999, a zatem i przez 37. Każdy składnik sumy w drugim nawiasie jest więc podzielny przez 37, a stąd wynika opisana cecha podzielności.

4. Po skasowaniu pierwszego towaru na rachunku Natalii była pewna liczba złotych i 99 gr. Każdy następny towar powoduje wzrost liczby złotych i zmniejszenie liczby groszy na rachunku o 1. Załóżmy, że kupiła n produktów. Mamy możliwą równość $99-(n-1) = 76$, skąd $n=24$. Oczywiście Natalia mogła też kupić 124 produkty lub więcej, ale wtedy całkowity rachunek przekroczyłby podaną w zadaniu kwotę. Za bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt.

5. Niech p oznacza liczbę papuzich skarpet w szufladzie. Aby mieć pewność, że będzie miał 2 papuzie, Franciszek musi wyciągnąć co najmniej 12 skarpet (uzasadnienie tego za 2 pkt). Aby mieć pewność wyciągnięcia co najmniej 2 kanarkowych skarpet, Franciszek musi wyjąć $p+2$ skarpety (uzasadnienie za 2 punkty, chyba że odjęto je poprzednio). Zatem $p+2= 2\cdot 12=24$, więc papuzich skarpet jest 22, a wszystkich 32.

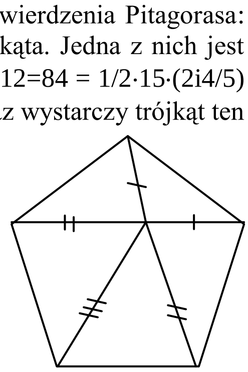
6. Niech a i b oznaczają wymiary prostokąta w kratkach i $a\geq b$. Wszystkich kratek w prostokącie jest ab, a przylegających do brzegu $2a+2b-4$. Zatem $ab = 2\cdot(2a+2b-4)$, skąd $ab-4a-4b+16=8$, czyli $(a-4)(b-4)=8$. Czynniki są całkowite i dodatnie (za uzasadnienie dodatniości 2 pkt), więc mamy dwie możliwości rozkładu: (8, 1) i (4, 2), skąd dostajemy $a=12$, $b=5$ lub $a=8$, $b=6$. Prostokąt może mieć $12\cdot 5=60$ lub $8\cdot 6=48$ kratek. Za podanie jednego wyniku przyznajemy 3 pkt. Za podanie odpowiedzi i sprawdzenie, że spełnia warunki zadania (bez uzasadnienia, że innych możliwości nie ma) przyznajemy 5 pkt.

7. Podzielność przez 12 jest równoważna jednoczesnej podzielności przez 3 i 4 (uzasadnienie tego faktu 3 pkt). Wśród czterech liczb istnieją dwie z tą samą resztą z dzielenia przez 3 (zasada szufladkowa – uzasadnienie 2 pkt), więc jedna z różnic, a z nią cały iloczyn, dzieli się przez 3. Jeśli wśród czterech liczb trzy mają tę samą parzystość, trzy różnice są parzyste, zatem iloczyn dzieli się przez 8, a więc i przez 4. Jeśli są dwie liczby parzyste i dwie nieparzyste, ich różnice są parzyste, zatem iloczyn dzieli się przez 4.

8. Załóżmy, że złoto ukradł A. Wtedy drugie zdania B i C są prawdziwe, a A i D fałszywe, więc A i D są kłamcami. To znaczy, że oba zdania C są prawdziwe, więc C nie jest kłamcą. Wtedy pierwsze zdanie B jest fałszem, wiec B jest kłamcą. W tym wypadku jest 5 zdań prawdziwych. Imiona sprawców zmieniają się w zadaniu cyklicznie, więc w każdym z pozostałych przypadków rozumowanie i wynik są identyczne. Za przeprowadzenie czterech rozumowań bez zauważenia symetrii zadania odejmujemy 3 pkt.

9. Zacznijmy od dwóch niepodobnych trójkątów pitagorejskich, o bokach np. 5, 12, 13 i 3, 4 i 5. Przeskalujmy ten drugi w skali 3, tak by przyprostokątna o boku 4 miała długość 12. Sklejmy ten trójkąt z 5, 12, 13 bokami o długości 12. Otrzymany trójkąt ma boki długości 13, 14, 15 i jest różnoboczny, a także ostrokątny, co łatwo sprawdzić z twierdzenia Pitagorasa: $15^2<14^2+13^2$(za brak sprawdzenia ostrokątności odejmujemy 4 pkt). Zbadajmy wysokości tego trójkąta. Jedna z nich jest sklejonym bokiem, wiec ma długość 12. Pozostałe wyznaczymy z pola trójkąta, które wynosi $1/2\cdot 14\cdot 12=84 = 1/2\cdot 15\cdot(2i4/5) = 1/2\cdot 13\cdot(3i3/13)$. Zatem wysokości opuszczone na podstawy mają długości 2 i 4/5 oraz 3 i 3/13. Teraz wystarczy trójkąt ten przekształcić w skali $5\cdot 13=65$, boki pozostaną całkowite, a wysokości też staną się całkowite.

10. Rysunek przedstawia widok ostrosłupa z góry. Odcinki dwukreślne mają długość taką, jak bok podstawy. Ostrosłup nie jest prawidłowy, gdyż ścianę z ramionami razkreślnymi możemy ustawić np. w płaszczyźnie prostopadłej do podstawy ostrosłupa i spodek wysokości nie pokryje się ze środkiem podstawy (za brak uzasadnienia odejmujemy 2 pkt). Ściany boczne ostrosłupa, jak łatwo sprawdzić są równoramienne.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1) Cztery jednakowe cylindryczne słoiki umieszczono ciasno we wnętrzu okrągłego garnka (na styk). Promień podstawy słoika wynosi 1. Jaka jest średnica garnka?

2) Liczba palindromiczna ma taką samą wartość, gdy jest czytana w przód i wspak. Leon wypisał wszystkie 5-cyfrowe liczby palindromiczne. Jaka liczba znajduje się na 37 miejscu jego listy?

3) Uzasadnij, że liczba 2^n-3 dzieli się przez 5 dla nieskończenie wielu n.

4) W trójkącie ABC obieramy punkt wewnętrzny M i łączymy z A i B. Pokazać, że kąt AMB jest większy niż ACB.

5) Podaj przykład wielomianu stopnia 100 o współczynnikach całkowitych, którego najmniejsza wartość jest równa połowie największej wartości.

6) Krzysio ma szesć kart. Na każdej znajduje się pewna liczba całkowita dodatnia. Krzyś wyciąga trzy karty i oblicza sumę otrzymanych liczb. Robi tak dla wszystkich możliwych losowań trzech kart. W połowie przypadków otrzymuje sumę 16, a w pozostałych sumę 18. Jaka jest najmniejsza liczba na kartach?

7) Na boku CD kwadratu $ABCD$ leży punkt E. Łączymy go z wierzchołkami A i B. Odcinek AE jest podzielony na 4 równe części punktami P, R, T (leżącymi w tej kolejności w kierunku od A do E), a odcinek BE jest analogicznie podzielony punktami Q, S, U (leżącymi w tej kolejności w kierunku od B do E). Odcinek PQ ma długość 3. Jakie pole ma czworokąt $PQUT$?

8) Czy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zbiór $\{1, 3, 5, ..., 4n-1\}$ da się podzielić na dwa takie, że suma elementów jednego jest trzykrotnie większa od sumy elementów drugiego?

9) Czy istnieją takie trójkąty ABE i ABF, że wysokość trójkąta ABE poprowadzona z wierzchołka E jest mniejsza od wysokości trójkąta ABF poprowadzonej z wierzchołka F, a promień okręgu wpisanego w trójkąt ABE jest większy od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABF?

10) Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków?

EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ze środków denek niesąsiednich słoików przeprowadzimy promienie do punktu styczności z garnkiem i sąsiednimi słoikami. Wtedy średnicę garnka można wysumować z dwóch promieni słoika i przekątnej kwadratu o boku będącym podwojonym promieniem słoika, czyli wynosi ona $1+1+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}$.

2. Pięciocyfrowa liczba palindromiczna jest wyznaczona jednoznacznie przez jej pierwsze trzy cyfry. Najmniejszy palindrom o 5 cyfrach to **100**01, drugi to **101**01, a 37. to **136**31.

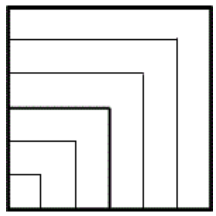
3. Wystarczy pokazać, że nieskończenie wiele potęg dwójki kończy się na 8 (uzasadnienie 5 pkt), więc po odjęciu trójki kończą się cyfra 5, dając żądaną podzielność.

4. Porównujemy kąty zewnętrzne dla kątów *M* i *C* w trójkątach *AMB* i *ACB* odpowiednio. Każdy jest sumą kątów wewnętrznych odpowiedniego trójkąta do niego nieprzyległych (uzasadnienie 2 pkt). W przypadku kąta *C* ta suma jest większa, bo sumujemy całe kąty, a w przypadku kąta *M* tylko ich części. Kąt, który ma większy kąt przyległy, sam jest mniejszy. Za istotnie bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt.

5. Nie ma takiego wielomianu, bo jeśli wielomian parzystego stopnia ma wartość najmniejszą, to nie ma największej i na odwrót.

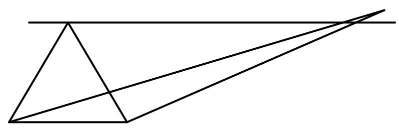
6. Możliwych wyborów trzech kart z sześciu jest $\binom{6}{3}$=20. Ponieważ pojawiają się tylko 2 wyniki, na kartach mogą być najwyżej dwie różne liczby (gdyby różne liczby były trzy, każda z nich w losowaniu z pozostałą parą kart dałaby inny wynik – za uzasadnienie 2 pkt). Niech *a* i *b* to liczby na kartach. Z zasady szufladkowej jedna z nich (np. *a*) pojawia się na co najmniej 3 kartach. Ponieważ liczby $a+a+a$, $a+a+b$ i $a+b+b$ są różne, liczba *b* może być tylko na jednej karcie. Mamy zatem 2 przypadki: $a+a+a=16$, $a+a+b=18$ (co jest niemożliwe, bo *a* nie byłoby całkowite) oraz : $a+a+a=18$, $a+a+b=16$, co daje $a=6$ i $b=4$, co jest odpowiedzią do zadania.

7. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa odcinki *AB*, *PQ*, *RS* i *TU* są równoległe (za powołanie się na twierdzenie proste odejmujemy 2 pkt), zatem trójkąty *ABE*, *PQE* i *TUE* są podobne (cecha kkk). Ponadto $AB:PQ:TU = 4:3:1$, więc $AB=4$, a pole trójkąta *ABE* wynosi 8. Z podobieństwa pola trójkątów *PQE* i *TUE* wynoszą odpowiednio $(^3/_4)^2\cdot 8 = {^9/_2}$ i $(^1/_4)^2\cdot 8 = ½$. Stąd pole trapezu PQUT to $^9/_2 - {^1/_2} = 4$.



8. Zasadę takiego podziału wyjaśnia rysunek. Wielokąty (tzw. gnomony) o polach 1, 3 i 5 składają się na kwadrat będący ćwiartką dużego, a pozostałe 3/4 dają gnomony o polach 5, 7 i 9. To rozumowanie jest poprawne dla każdego *n*.

9. Za rozwiązanie opisujące rysunkowo intuicje rozwiązania przyznajemy 5 pkt.
Ze wzoru na promień okręgu wpisanego w trójkąt (uczeń powinien go na prośbę jury uzasadnić, jeśli tego nie potrafi, odejmujemy 3 pkt) mamy $r = \dfrac{2P}{a+b+c}$.



Oba trójkąty mają niemal jednakowe pola, a obwód drugiego można uczynić dowolnie dużym, odsuwając wierzchołek *F*. Wtedy promień staje się dowolnie mały.

10. Tak, np. lekko „zestrugany" symetrycznie z dwóch stron graniastosłup sześciokątny z jedną krawędzią zamiast górnej podstawy łączącą jej dwa przeciwległe wierzchołki. Ściany tej bryły są czworokątami i jedna (dolna podstawa) jest sześciokątem.