KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2015

SZKOŁY PONADGIMNAZJALNE – ELIMINACJE SZKOLNE
LOGIKA – KONSPEKT WYKŁADU

- -

1) Czym zajmuje się logika
2) George Boole – twórca logiki dwuwartościowej
3) Spójniki logiczne (w tym boolowskie) i bramki logiczne
4) Zaprzeczanie zdań (koniunkcji, alternatywy i implikacji)
5) Własności spójników logicznych (przemienność, łączność, rozdzielność, arność)

- -

Ad 1. Logika jako nauka rozwinęła się w starożytnej Grecji. Jej podstawy dał Arystoteles. Słowo *logos* oznaczało mowę (stąd logopeda), a logika była nauką o jasnym i precyzyjnym wypowiadaniu się i poprawnym wnioskowaniu. Dzisiaj *logia* oznacza tyle, co nauka (biologia, psychologia), czyli jest synonimem precyzji.
Język potoczny często jest mało precyzyjny. Należy dbać o jednoznaczność wypowiedzi.
Przykłady zdań nieprecyzyjnych:

- *Bilety można kupić u kierowcy w soboty, niedziele oraz dni świąteczne po godzinie 18*. (MPK Wrocław)
  Czy można kupić bilet u kierowcy w niedzielny poranek? Aby poprawić precyzję komunikatu, wystarczyłoby zmienić szyk zdania: *Bilety można kupić u kierowcy po godzinie 18 w soboty, niedziele oraz dni świąteczne*.
- *Powiedział, że się ochłodziło,(!) i zaczął padać śnieg*. U kogo ten śnieg spadł? Na piśmie wypowiedź jest jasna, bo o jej znaczeniu decyduje użycie przecinka. Ale w mowie nie.

Grecy sformułowali podstawowe **prawa logiki**, które stały się narzędziem produkowania nowych twierdzeń, np.:

- prawo sprzeczności: dwa zdania wzajemnie sprzeczne nie mogą być jednocześnie prawdziwe,
- prawo wyłączonego środka: z dwóch zdań sprzecznych jedno jest prawdziwe, a drugie fałszywe,
- zasada podwójnego przeczenia: jeżeli nieprawda, że *p* jest fałszywe, to *p* jest prawdziwe,
- zasada dedukcji: jeśli uznajemy zdanie *p* i uznajemy rozumowanie prowadzące od zdania *p* do zdania *q*, to musimy uznać także zdanie *q*,
- zasada sprowadzenia do niedorzeczności (sprzeczności): jeśli ze zdania *p* wynika zaprzeczenie tego zdania (dowolne zdanie fałszywe), to zdanie *p* nie jest prawdziwe.

Ćwiczenie: Anioł i diabeł pod postacią niewiast stoją na rozdrożu dróg do raju i piekła. Anioł mówi prawdę, a diabeł kłamie. Jak wybrać drogę do raju zadając jednemu z nich jedno pytanie typu tak/nie? (Wykorzystać zasadę podwójnego przeczenia: Czy odpowiesz tak, jeśli zapytam, czy twoja droga prowadzi do raju? Na tak – wybieramy tę drogę, na nie – przeciwną).

Ad 2. George Boole (1815!!!-1864) wprowadził pojęcie zdania logicznego oraz wartości logiczne prawdy i fałszu. Zdanie logiczne to zdanie, któremu jednoznacznie można przypisać wartość prawdy lub fałszu. Nie każde zdanie jest zdaniem logicznym(ang. *statement* i *proposition*), np. Dziś jest raczej ciepło. Chciałbym mieć psa. Zdanie, które właśnie czytasz, jest fałszywe. x^2=11.
Na zdaniach logicznych (a raczej na wartościach logicznych tych zdań) wykonujemy operacje koniunkcji, alternatywy i negacji, które Boole zdefiniował w sposób arytmetyczny. Logika boolowska 70 lat po jego śmierci stała się podstawą działania komputerów. Więcej o GB na slajdach.

Ad. 3. Ze zdań prostych tworzy się zdania złożone za pomocą spójników logicznych I/AND (koniunkcja), LUB/OR (alternatywa) i NIE/NOT (zaprzeczenie). Można definiować dalsze spójniki np. ALBO/XOR (alternatywa wykluczająca, exclusive OR, czytamy po polsku KSOR),
JEŚLI…, TO… /IF… THEN (implikacja). Przykłady:

- Równanie x^2+4=20 ma dwa pierwiastki i oba są całkowite.
- Program działa lub powstał błąd przy wprowadzaniu danych.
- Nieprawda, że pięć jest liczbą pierwszą.
- Jeśli będzie trzęsienie ziemi, to dom się zawali.
- Każda liczba całkowita jest sumą czterech kwadratów.

Ćwiczenie. Król Rambo rozkazał, aby poddani nosili T-shirty spełniające warunek: jeśli z jednej strony jest 7, to z drugiej musi być A. Król zauważył ludzi idących w różne strony. Na koszulkach widzi: A, 7, B, 6, C, 5. Chciałby sprawdzić, czy poddani przestrzegają jego praw. Których powinien wezwać do kontroli? Jaka jest najmniejsza liczba sprawdzeń? (7, C, B)

Definicje spójników logicznych. Boolowskie: AND, OR, NOT:

A I B (A AND B)

A\B	**P**	**F**
P	P	F
F	F	F

*	**1**	**0**
1	1	0
0	0	0

A LUB B (A OR B)

A\B	**P**	**F**
P	P	P
F	P	F

max	**1**	**0**
1	1	1
0	1	0

KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2015

NIE A (NOT A)

A	P	F
NIE A	F	P

-+1	1	0
	0	1

A ALBO B (A XOR B)

A\B	P	F
P	F	P
F	P	F

$+_2$	1	0
1	0	1
0	1	0

(A OR B) AND NOT (A AND B)

A	B	A OR B	NOT(A AND B)	A XOR B

Za pomocą 3 spójników boolowskich można zdefiniować wszystkie pozostałe, np.

JEŚLI A, TO B (A =>B)

A\B	P	F
P	P	F
F	P	P

?	1	0
1	1	0
0	1	1

(NOT A) OR B

A	B	(NOT A) OR B	A => B
P	P	P	P
P	F	F	F
F	P	P	P
F	F	P	P

W zadaniach nie stosujemy symboli spójników poza implikacją, ale jeśli uczeń zna symbole i tak woli, może ich używać.

Logika dwuwartościowa pozwala budować dla zdań obwody elektryczne (prawda = prąd płynie, fałsz = prąd nie płynie, a jak ocenić, kiedy prąd płynie silniej lub słabiej?). Konstrukcja bramek logicznych AND i OR jest na slajdach. Można używać wielu kombinacji takich bramek. Procesor, płyta główna komputera, a nawet telefon komórkowy to nic innego, jak miliardy takich bramek.

Ćwiczenie. Podaj wszystkie wartościowania, dla których zdania są a) prawdziwe, b) fałszywe.

a) (NOT *p* OR NOT *q* OR NOT *r* OR NOT *s*) => (*p* AND *q* AND *r* AND *s*)

b) (*p* OR *q*) XOR (*p* OR *r*) XOR (*p* OR *s*) XOR (*p* OR *t*)

Ad 4. Zaprzeczanie zdań złożonych.

Zaprzeczenie AND: *Ania i Bartek są szczęśliwi*. Testowanie różnych wariantów.

	A i B są S	A i B są nie S	A jest nie S lub B jest nie S
A=P, B=P	P	F	F
A=P, B=F	F	F	P
A=F, B=P	F	F	P
A=F, B=F	F	P	P

Mamy zatem prawo logiczne: NOT (A AND B) = NOT A OR NOT B.

Zaprzeczenie OR: *Ania lub Bartek są szczęśliwi*. Testowanie różnych wariantów.

	A lub B są S	A lub B są nie S	A jest nie S i B jest nie S
A=P, B=P	P	F	F
A=P, B=F	P	P	F
A=F, B=P	P	P	F
A=F, B=F	F	P	P

Mamy zatem prawo logiczne: NOT (A OR B) = NOT A AND NOT B.

Zaprzeczenie implikacji: *Jeśli będzie trzęsienie ziemi, to dom się zawali*. Testowanie.

	T => Z	NIE (T to Z)	T i NIE Z
T=P, Z=P	P		
T=P, Z=F	F		
T=F, Z=P	P		
T=F, Z=F	P		

Mamy zatem prawo logiczne: NOT (A => B) = A AND NOT B.

Czy zachodzi prawo logiczne: A => B = (NOT A) OR B = NOT B => NOT A?

	A => B	NOT A	NOT B	(NOT A) OR B	NOT B => NOT A
A=P, B=P					
A=P, B=F					
A=F, B=P					
A=F, B=F					

KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2015

Wszystkie możliwe spójniki można też zdefiniować za pomocą zestawów: (AND XOR NOT), (AND, NOT), (OR, NOT), NAND – zaprzeczenie AND, NOR – zaprzeczenie OR, np.

NOT A = NAND (A, A) = NOT (A AND A)
A OR B = NOT (NOT A AND NOT B) = NAND(NAND(A, A), NAND (B, B))
A OR NOT B = NOT(NOT A AND B) = (A NAND A) NAND B = NAND(NAND(A, A), B).
A AND B = NOT(NOT A OR NOT B) = …

Ad. 5. Czy operacje logiczne są przemienne, łączne lub rozdzielne jedna względem drugiej? Co to znaczy? Sprawdzić na dwóch przykładach, które własności są prawami logicznymi, np. rozdzielność AND względem OR i koniecznie łączność XOR: (A XOR B) XOR C = A XOR (B XOR C) – 8 przypadków

A	B	C	(A XOR B) XOR C	A XOR (B XOR C)
P	P	P		
P	P	F		
P	F	P		
P	F	F		
F	P	P		
F	P	F		
F	F	P		
F	F	F		

Z łączności AND, OR, XOR możemy łączyć tymi spójnikami więcej zań niż 2.
A_1 AND A_2 AND A_3 AND… AND A_{2015} – wszystkie A_i muszą być prawdziwe, aby to było prawdą.
A_1 OR A_2 OR A_3 OR… OR A_{2015} – co najmniej jedno A_i musi być prawdziwe, aby to było prawdą.
A_1 XOR A_2 XOR A_3 XOR… XOR A_{2015} – nieparzyście dużo A_i musi być prawdziwych, aby to było prawdą.

Spójniki mogą mieć różną arność, czyli liczbę argumentów. Są spójniki unarne (np. NOT A), binarne np. A OR B, A XOR B, A => B. Można definiować spójniki trenarne, np. formułą *(A, B, C) = (A OR NOT B) => C lub wypełniając odpowiednią tabelkę itd.

Ćwiczenie. Ile jest wszystkich możliwych spójników jedno- / dwu- /trzyargumentowych?
Obliczamy, ile pól tabelki jest do wypełnienia (unarny – 2, binarny – 4, bo to kwadrat 2×2, trenarny – 8, bo to sześcian $2\times2\times2$), w każdym polu może stać P lub F, więc różnych wypełnień jest odpowiednio 2^2=4, 2^4=16, 2^8=256.

UWAGI

1. Czas trwania wykładu 60 min. Czas pisania zadań 45 min.
2. Termin konkursu szkolnego:1 XII (wykład może być wcześniej). Termin odesłania wyników: 7 XII. Finał 19 XII, godz. 10:15, sala HS Instytutu Matematycznego UWr (pl. Grunwaldzki 2/4, tel. na portiernię 71 3757414).
3. Wyniki odesłać w pliku xls. Wzór pliku do pobrania ze strony konkursu: http://www.fmw.uni.wroc.pl/dla-uczni%C3%B3w/koma/2015/xi-konkurs-matematyczny-koma-2015
4. W przypadku dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich, ale należy podać liczbę uczestników wykładu i części zadaniowej.
5. Prac nie trzeba przesyłać pocztą, ale należy je zachować do czasu ogłoszenia listy finalistów. W przypadku dużych odchyleń od średniej możemy poprosić o przesłanie prac.
6. Każdy podpunkt z zadań 1-4 i 8-15 jest oceniany zero-jedynkowo. Pozostałe są oceniane w skali 0-2 pkt.

KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2015

KLUCZ

Zad. 1. a) Lincoln, b) Cork
c) 200. urodzin, d1) logika dwuwartościowa d2) spójniki logiczne I, LUB, NIE (tzw. boolowskie)

Zad. 2. a) 2+2=5, b) x+y =5

Zad. 3. T N T

Zad. 4. a) Marcin jest niższy od Wojtka lub tego samego wzrostu (jest nie wyższy) a/i Tomek jest wysoki
b) Nel jest dobra (nie jest zła) lub ładna. c) Jan jest piękny i młody, a/i/ale jego syn jest biedny.

Zad. 5. a), c), f)
(1 pkt za 2, 2 pkt za 3, – błędne)

Zad. 6. Z, 5
(+1,+1, – błędne)

Zad. 7. Anzelm
(0 lub 2)

Zad. 8. a) A AND B = B AND A
b) A XOR (B OR C) =
(A XOR B) OR (A XOR C)
a) T, b) N

Zad. 9. NOTa, F, P, F

Zad. 10. a) 2016, b) > 0 (≥1),
c) nieparzysta liczba,
d) ≤ 2015 (< 2016)

Zad. 11. N T T N

Zad. 12. a1) 101 lub 11*,
a2) 0** lub 100
b1) zawsze, b2) nigdy
c1) 10000 lub 01111,
c2)11*** lub inne analogicznie

Zad. 13. a) 10, b) 2^{16}, c) 64, d) 16

Zad. 14. a) 0, b) 0, c) x, d) x

Zad. 15. przykładowe najprostsze odpowiedzi: a) *(p, q, q) lub *(p, 0, q),
b) NAND(NAND(x,NAND(y,y)),NAND(z,z)),
c) x OR (y AND NOT z)

Zad. 16. p=1, q=0, r=0 i reszta dowolna (1 pkt. za poprawne p i r)