KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2016

SZKOŁY PONADGIMNAZJALNE – ELIMINACJE SZKOLNE
RIVER CROSSING – KONSPEKT WYKŁADU

- -

1) Historia problemu
2) Zadanie o kozie, wilku i kapuście
3) Metoda rozwiązywania zadań przewozowych
4) Przykłady

- -

Ad 1. Zadania przewozowe (ang. *river-crossing problems*) po raz pierwszy pojawiły się w formie spisanej w VIII wieku w dziele średniowiecznego anglosaskiego mnicha Alkuina "Propositiones ad acuendos iuvenes" (problemy dla wyostrzenia umysłu młodzieży) – pierwszym w historii zbiorze łamigłówek logicznych. Były to trzy słynne zadania (znane do dziś w wielu wariantach) polegające na przeprawieniu przez rzekę a) wilka, kozy i kapusty, b) rodziny z dwójką dzieci c) trzech par zazdrosnych braci z siostrami. [ew. slajdy].
Alkuin to jeden z największych umysłów epoki Karolingów. Pobierał nauki w szkole katedralnej w Yorku w zakresie programu *trivium* (gramatyka, logika, retoryka) i *quadrivium* (geometria, arytmetyka, astronomia , muzyka) oraz prawa i literatury. Doskonale znał łacinę i grekę. Był opatem w klasztorze św. Marcina w Tours, a od 782 roku na dworze Karola Wielkiego w Akwizgranie kierował Szkołą Pałacową (zwaną na wzór starożytny Akademią), na której wzorowały się późniejsze o 200 lat pierwsze uniwersytety cywilizacji łacińskiej. Był osobistym nauczycielem i doradcą władcy w sprawach nauki i wychowania, kościoła i polityki. Przeprowadził reformę szkolną, przywrócił metody nauczania stosowane w Akademii Platońskiej, propagował zastąpienie trudnej w czytaniu **majuskuły merowińskiej** bardziej czytelną **minuskułą karolińską**, na wzór której powstały późniejsze czcionki drukarskie. Był autorem podręczników do 7 sztuk wyzwolonych. Widział ścisłe powiązanie etyki i pedagogiki z logiką. W swoim dziele "De dialectica" podkreślał ważne funkcje, jakie logika pełni w wychowaniu człowieka światłego, prawego, o erudycyjnej wiedzy. Takie wykształcenie wymaga wyćwiczenia sprawnego umysłu, a to najłatwiej osiągnąć przez rozwiązywanie zagadek i problemów logicznych.

Ad. 2. Farmer ma przewieźć na drugi brzeg rzeki wilka, kozę i kapustę. Do dyspozycji ma łódkę, w której oprócz niego mieści się tylko jedno zwierzę lub główka kapusty. Oczywiście jeśli wilk zostanie niepilnowany sam na sam z kozą, to ją pożre. Podobnie koza uczyni z kapustą. Wilk nie jada warzyw ani ludzi.
Dowolne próby rozwiązania zadania [ew. animacja http://matematyczny.blox.pl/resource/koza.swf]
Aby nie rozwiązywać zadań na oślep przez zgadywanie, potrzebne jest systematyczne rozważenie wszystkich możliwych ruchów i wybór najkrótszego sposobu, jeśli jest wiele możliwych rozwiązań. Trzeba też umieć uzasadnić, że zadanie nie ma rozwiązania.

Ad 3. Rozwiązywanie zadań przewozowych ułatwia odpowiednia notacja.

1 Krok. Kodowanie. Każdy stan (na obu brzegach rzeki) kodujemy, podając kto znajduje się po tej samej stronie rzeki, co łódka. Zaczynamy od systematycznego wypisania wszystkich stanów, które nie są zabronione w treści zadania. Łączymy linią te stany, w których można przejść bezpośrednio z jednego do drugiego (przez jedno przepłynięcie łódką). Każde takie połączenie działa w obie strony.

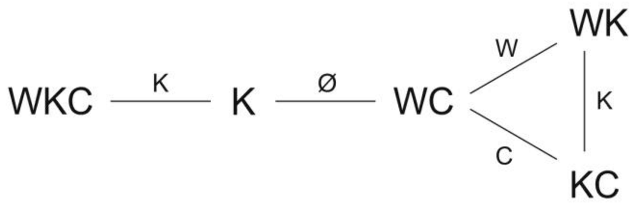
2 Krok. Analiza diagramu. Jeśli dwa stany są na diagramie połączone ciągiem linii, to można w skończonej liczbie ruchów przejść z jednego z nich do drugiego. Jeśli dwa stany łączy droga o parzystej liczbie linii, to oba są po tej samej stronie rzeki, a jeśli o nieparzystej – to są po przeciwnych stronach. Zadanie jest rozwiązane, gdy w otrzymanym diagramie istnieje droga od stanu początkowego do niego samego (pętla) o nieparzystej długości. Dlaczego? Wystarczy zatem znaleźć w diagramie dowolną pętlę o nieparzystej długości i połączyć ją drogą (dowolnej długości) ze stanem początkowym. Długość drogi do pętli może być dowolna, bo przechodzimy ją dwukrotnie, więc zawsze liczba ruchów po niej jest parzysta. W szczególności wystarczy znaleźć pętlę z jakiegoś stanu do niego samego, o ile stan ten można połączyć ze stanem wyjściowym.

3. Krok. Odczytanie rozwiązania. Z diagramu, w którym zaznaczono wszystkie możliwe połączenia między stanami, można odczytać wszystkie możliwe rozwiązania i wskazać najkrótsze z nich. Można też uzasadnić brak rozwiązania (brak pętli lub wszystkie pętle parzystej długości). Na podstawie diagramu odpowiadamy na dodatkowe pytania do zadań.

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2016

Ad. 4. Diagramy przewozowe robimy NA TABLICY na żywo. Dopiero po narysowaniu diagramu można jego analizę prowadzić na slajdzie.

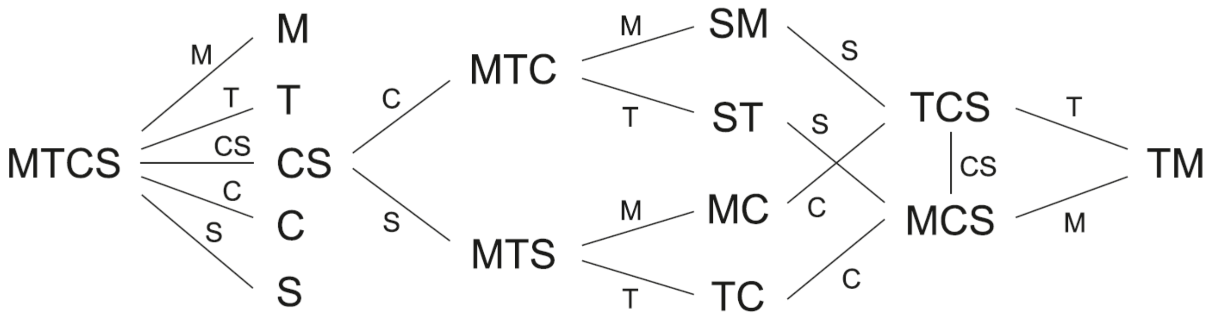
Przykład. 1. Koza (K), wilk (W), kapusta (C)
Możliwe stany na brzegu z łódką: WKC, WC (K na II brzegu), WK (C na II brzegu), KC (W na II brzegu), K (WC na II brzegu), W i C są zabronione, bo wtedy na II brzegu mamy KC lub WK. To są już wszystkie możliwości. Dlaczego? Mamy więc 5 stanów dozwolonych: WKC, WC, WK, KC i K. Rysujemy diagram wszystkich możliwych połączeń. Sprawdzamy, czy innych nie ma. Dla ułatwienia analizy na krawędziach można zaznaczyć, co zabiera farmer w danym ruchu, a nad polem diagramu – stan po przeciwnej stronie rzeki (kreda kolor!).



Rys. 1.

Widać pętlę długości nieparzystej (=3) połączoną ze stanem początkowym. Najkrótsze rozwiązanie – 7 ruchów (przepłynięć łódką, 7 = 2+3+2). Są 2 możliwe rozwiązania, bo pętlę można przejść w dwóch kierunkach. Najwięcej razy płynie koza (3 razy).

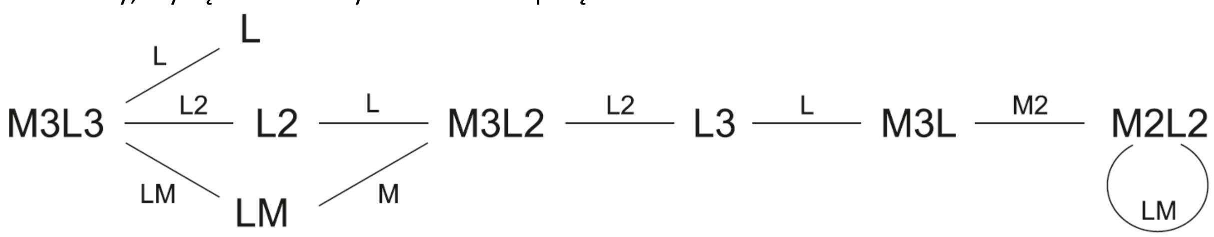
Przykład 2. Rodzice z córką i synem muszą przeprawić się przez rzekę. Ojciec i matka ważą tyle samo, a dzieci ważą połowę tego. Łódka może unieść ciężar jednej osoby dorosłej. W jaki sposób rodzina może przedostać się na drugą stronę rzeki?
Możliwe stany: MTCS, MTC, MTS, MCS, TCS, MT, MC, MS, TC, TS, CS, M, T, C, S (wszystkie są dozwolone). Rysujemy diagram, sprawdzamy, czy są wszystkie możliwe połączenia.



Rys. 2.

Widać różne pętle, ale czy jest jakaś nieparzystej długości? Są długości 6, 8 ale i 7, 9. Najkrótsze rozwiązanie ma długość 9. Są 4 możliwe pętle długości 7 (zewnętrzna, wewnętrzna, górna i dolna) każdą z nich można przejść w 2 kierunkach. To daje 8 możliwych najkrótszych rozwiązań. W każdym dzieci muszą 3 razy płynąć wspólnie.

Przykład 3. Trzej misjonarze i trzej ludożercy chcą przedostać się na drugą stronę rzeki. Mają do dyspozycji łódź, która może zmieścić tylko dwie osoby. Na jednym brzegu nigdy nie może zostać więcej ludożerców niż misjonarzy. Jak przeprawić wszystkich bezpiecznie na drugą stronę?
Nie rozróżniamy misjonarzy i ludożerców. Stany zabronione: M2L3, ML3, ML2, M2, M, M2L. Stany możliwe: M3L3, M3L2, M3L, M3, M2L2, ML, L, L2, L3. Czy to wszystkie? OK, bo jest 15 sztuk (4·4–1). Rysujemy diagram, sprawdzamy, czy są na nim wszystkie możliwe połączenia.



Rys. 3.

Jest pętla długości parzystej (4) ale i nieparzystej (1). Są cztery możliwe rozwiązania długości 11 (w obie strony górą, w obie dołem, górą a potem dołem, dołem a potem górą). Chociaż M3 jest dozwolone, nie ma go na diagramie. To nie znaczy, że nigdy misjonarze nie zostaną sami na brzegu – zostaną (stan L3), ale nigdy nie będą na brzegu z łódką. Nie da się uniknąć sytuacji, że dwaj ludożercy płyną razem ani że płynie ludożerca z misjonarzem. Można uniknąć sytuacji, gdy misjonarz płynie sam.

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2016

Zadanie domowe (jeśli ktoś robi wykład z przerwą)

1. Trzech zazdrosnych mężów pragnie przeprawić się ze swymi żonami przez rzekę, mając łódkę, która pomieści maksimum dwie osoby. W jaki sposób mają się przeprawić, aby żadna z kobiet nie została w towarzystwie innych mężczyzn niepilnowana przez własnego męża?

2. Trzeba_przetransportować przez rzekę osiem osób: mamę, tatę, dwóch synów, dwie córki, policjanta i złodzieja, przestrzegając następujących reguł:

- Łódź mieści nie więcej niż 2 osoby.
- Tylko dorośli poza skutym złodziejem mogą wiosłować.
- Tato nie może być w obecności dziewczynek bez mamy.
- Mama nie może być w obecności chłopców bez taty.
- Złodziej nie zostać z członkami rodziny bez dozoru policjanta.

UWAGI

1. **Czas trwania** wykładu 45 min. Czas pisania zadań 45 min. Nie trzeba rozwiązać wszystkiego. Jakie były progi w poprzednich latach, można sprawdzić na stronie WWW konkursu w zakładce >historia.
2. **Termin** konkursu szkolnego: 28 XI (wykład), część zadaniowa może być tego samego dnia lub następnego. Termin odesłania wyników: 4 XII. Finał 17 XII, godz. 10:15, sala HS Instytutu Matematycznego UWr (pl. Grunwaldzki 2/4, tel. na portiernię 71 3757414).
3. Wyniki należy przesłać w pliku xls. Wzór do pobrania ze strony konkursu.
4. W przypadku dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich, ale należy podać liczbę uczestników wykładu i części zadaniowej.
5. Prac nie trzeba przesyłać pocztą, ale należy je zachować do czasu ogłoszenia listy finalistów. W przypadku dużych odchyleń wyników z danej szkoły od średniej, możemy poprosić o przesłanie prac.
6. Jeśli w kluczu nie podano inaczej, każdy podpunkt jest oceniany zero-jedynkowo.

KLUCZ

1. a) Anglia, b) Akwizgran, c) Karol Wielki, d) VIII e) minuskuła
2. a) LKZ, LK, LZ, KZ, K, b) L, Z (nie LZ), c) A, B, F (+1 za każde dobrze, -1 za każde źle, ale nie mniej niż 0)
3. a) N, b) N, c) N, d) N, e) T, f) T, g) N, h) N, i) T
4. a) T, b) T, c) T, d) T, e) T, f) N
5. a) 2, b) 3, c) 5, d) 7, e) 2
6. 4 pkt za całość, -1 za niezauważenie pętli, -1 gdy brak jakiegoś martwego końca

```
R                                                          R2
|                                                          |
| R       D2          D             R            D         | R        D2
R2D2 ---------- D2 ----------R2D ---------- RD ----------- RD2
| D
|
D
```

7. a) 9, b) 1, c) 4, d) 3, e) N
8. a) 13, b) 3, c) 6, d) 1, e) 1, f) N, g) N, h) T, i) T, j) N
9. a) 13, b) 4, c) TT (2 pkt), d) NN (2 pkt)
10. a) 13, b) 32, c) 6, 8 (2 pkt), d) 4, 9 (2pkt), e) NT (2 pkt)