DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

SP MŁODZICY – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

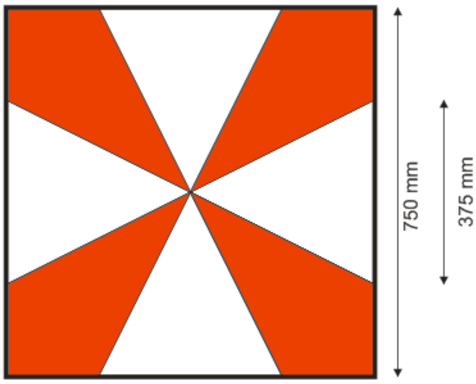
1) Zapis a^3 [czytaj: *a do potęgi trzeciej*] oznacza $a \cdot a \cdot a$. Janek obliczył szóste potęgi liczb 1, 2, 3, 4 i 5. Ile wśród nich jest liczb nieparzystych?

2) Liczba 2018 jest iloczynem dwóch liczb pierwszych. Ile wynosi suma tych liczb?

3) Czy liczba $2010^3 – 2015^3$ jest wielokrotnością piątki?

4) Którą potęgą trójki jest liczba $25 \cdot 15 \cdot 9 \cdot 5{,}4 \cdot 3{,}24$?

5) Narodowe Święto Niepodległości to święto państwowe obchodzone w Polsce corocznie 11 listopada dla upamiętnienia odzyskania przez Polskę niepodległości w 1918 roku, po 123 latach zaborów. Świętem zostało ustanowione ustawą z dnia 23 kwietnia 1937. Podczas okupacji niemieckiej w latach II wojny światowej obchodzenie polskich świąt państwowych było niemożliwe. Po wojnie Krajowa Rada Narodowa zniosła to święto 22 lipca 1945 roku. Przywrócono je ponownie w okresie transformacji systemowej ustawą z 15 lutego 1989 roku. Kiedy przeprowadzono ostatni rozbiór Polski, który sprawił, że zniknęła ona całkowicie z mapy świata? Ile razy dzień 11 listopada był obchodzony jako oficjalne święto państwowe?



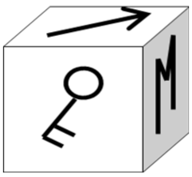
6) Na rysunku przedstawiono schemat sztandaru jednostki wojskowej, który ma kształt kwadratu. Określ, jaką część pola stanowi kolor szary (w oryginalnym projekcie czerwony).

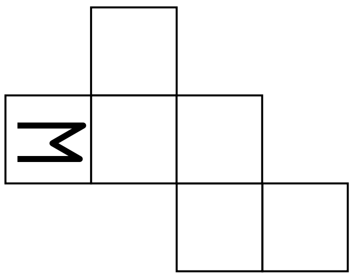
7) Ile jest liczb czterocyfrowych podzielnych przez 3, których iloczyn cyfr wynosi 5?

8) Jakie są miary kątów trójkąta równoramiennego ostrokątnego którego jeden z kątów ma 30°?

9) W małej wiejskiej szkole uczy 12 nauczycieli: 7 kobiet i 5 mężczyzn. Na ile sposobów można z nich wyłonić 5-osobową delegację na spotkanie z ministrem, jeśli musi się w niej znaleźć dokładnie jedna kobieta?

10) Rysunek przedstawia sześcian z zaznaczonymi ornamentami na trzech ścianach. Na każdej z siatek zaznaczono ścianę z literą M. Uzupełnij pozostałe ornamenty oraz ich cienie rzucane na przeciwległą ścianę podczas oświetlania prostopadłego danej ściany równoległą wiązką światła. Wykonanie siatki i manipulacja nią są niedozwolone.





DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
SP MŁODZICY – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. $1^6=1$ i jest nieparzyste. Iloczyny liczb parzystych dadzą liczby parzyste, a iloczyny liczb nieparzystych dadzą liczby nieparzyste. Zatem 3 wyniki będą nieparzyste

2. 2018 dzieli się przez 2, które jest liczbą pierwszą. Drugim czynnikiem pierwszym musi być 1009. Suma tych liczb wynosi 1011.

3. Badamy ostatnią cyfrę wyniku. Odjemna kończy się na 0, bo oba czynniki kończą się na 0. Odjemnik kończy się na 5, bo oba czynniki kończą się na 5. Wobec tego różnica kończy się na 5. Za brak uzasadnienia, że ostatnia cyfra iloczynu/różnicy zależy tylko od ostatnich cyfr czynników/składników odejmujemy3 pkt (uzasadnienia np. z algorytmu działań pisemnych). Uczeń powinien zacytować poprawnie cechę podzielności przez 5.

4. Obliczenia powinny być prowadzone techniką sprytnych rachunków. Za wyliczenie wartości iloczynu i rozkładanie go na trójki odejmujemy 2 pkt. Liczba z zadania to $5^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot {}^{54}/_{10} \cdot {}^{324}/_{100} = 5^3 \cdot 3^3 \cdot {}^{2\cdot 27}/_{2\cdot 5} \cdot {}^{4\cdot 81}/_{4\cdot 25} = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^4 = 3^{10}$.

5. Polska była pod zaborami przez 123 lata i odzyskała niepodległość w roku 1918. Zatem straciła ją (w wyniku III rozbioru) w 1795 (bo 1795+123 = 1918). Jeśli uczeń poda datę z głowy, należy poprosić, by uzasadnił tę odpowiedź na podstawie treści zadania (jeśli nie potrafi, odjąć 2 pkt). Przed II wojną światowa święto niepodległości obchodzono tylko w latach 1937 i 1938. Po wojnie jeszcze 30 razy od roku 1989 do 2018 (30 = 2018–1989+1). Łącznie świętowano więc 32 razy.

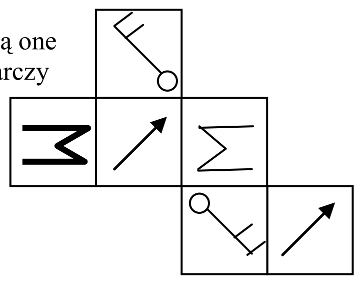
6. Z wymiarów wynika, że podstawa białego trójkąta jest połową boku kwadratu. Wysokość trójkąta też jest połową boku kwadratu. Oznaczmy tę długość przez a. Pole kwadratu wynosi $4a^2$, a pole białych trójkątów $4\cdot \frac{1}{2} a^2 = 2a^2$, jest wiec połową całości. Czerwona część sztandaru jest więc także połową pola. Za prowadzenie obliczeń na liczbach odejmujemy 3 pkt.

7. Nie ma takich liczb. Aby iloczyn cyfr był równy 5, liczba musi zapisywać się jedną piątką i trzema jedynkami (w dowolnej kolejności). Wówczas suma cyfr wynosi 8 i liczba nie dzieli się przez 3.

8. Trójkąt równoramienny naprzeciwko równych boków ma równe kąty. Jeśli kąt o mierze 30° leżałby przy podstawie, to pozostałe kąty miałyby 30° i 120°. Ten przypadek należy odrzucić, bo trójkąt nie jest wówczas ostrokątny (za podanie tej odpowiedzi odejmujemy 4 pkt). Zatem jedyny trójkąt spełniający warunki zadania ma kąty 30°, 75° i 75°.

9. Kobietę do delegacji wybierzemy na 7 sposobów. Wtedy trzeba jeszcze wybrać do niej 4 mężczyzn, a to oznacza to samo, co jednego z mężczyzn odrzucić. Odrzuconego możemy wybrać na 5 sposobów. Łącznie jest $7\cdot 5 = 35$ możliwych delegacji. Za zliczanie możliwości na palcach przyznajemy 4 pkt.

10. Rozwiązanie przedstawia rysunek. Na początku ustalamy pary ścian przeciwległych. Zawierają one ten sam symbol. Następnie ustalamy orientację symboli na siatce (w przypadku litery M wystarczy orientacja ‘góra-dół’ ze względu na symetrię, dla pozostałych symboli trzeba jeszcze ustalić ‘prawo-lewo’. Ustalamy, który punkt ściany leży pod początkiem, a który pod grotem strzałki oraz pod główka i końcem klucza. Za poprawną odpowiedź bez uzasadnienia, że jest poprawna przyznajemy 5 pkt.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

SP MŁODZICY – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1) Jaka największa liczba sześciocyfrowa zaczynająca się od cyfr 651 jest podzielna przez 163? W rozwiązaniu wykonaj jak najmniej rachunków.

2) W stuosobowej grupie polityków są albo osoby uczciwe, albo skorumpowane. Przynajmniej jedna z nich jest uczciwa. Wiadomo też, że w każdej parze polityków przynajmniej jedna osoba jest skorumpowana. Ile jest osób uczciwych w tej grupie?

3) Ile wynosi K? Wiadomo, że zachodzą poniższe warunki.

$$\begin{aligned} M + N + N &= 39 \\ K + K + L &= 37 \\ L + M + N &= 41 \\ K + L + N &= 36 \end{aligned}$$

4) Podane liczby mają wspólny czterocyfrowy dzielnik. Jaki? Wykonaj jak najmniej rachunków. 6924, 19618, 271190, 13848, 3462, 24234, .

5) Drewniany sześcian o krawędzi długości 1 dm waży 1,2 kg. Ile waży sześcian wykonany z tego samego drewna o krawędzi długości 2 cm?

6) W szufladzie znajduje się 10 par skarpetek, w tym dokładnie 3 pary skarpetek czarnych. Zaspany Tomek wyjmuje z szuflady z zamkniętymi oczami po jednej skarpetce. Ile co najmniej skarpet musi wyjąć, żeby mieć pewność, że przynajmniej dwie wyjęte skarpetki będą czarne?

7) Dla 38 uczestników wycieczki zarezerwowano nocleg w 15 pokojach. Dla dziewczynek zarezerwowano tylko dwójki, a dla chłopców – trójki. Dzieci zajęły wszystkie miejsca zarezerwowane miejsca. Ilu chłopców było na wycieczce?

8) Czterech chłopców brało udział w finale zawodów sportowych, w których nie było remisów. Następnego dnia na pytanie o wyniki odpowiedzieli:
Adam: Nie byłem ani pierwszy, ani ostatni.
Bartosz: Nie byłem ostatni.
Celestyn: Zająłem pierwsze miejsce.
Damian: Zająłem ostatnie miejsce.
Trzech chłopców powiedziało prawdę. Kto naprawdę zajął pierwsze miejsce?

9) W trójkącie równoramiennym ostrokątnym ABC kąt ACB ma miarę 36°. Na boku BC obrano punkt D. Odcinek AD ma długość 8 cm i dzieli kąt CAB na połowy. Jaką długość ma bok AB?

10) Pewna liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, a przy dzieleniu przez 7 także daje resztę 1. Jaką resztę daje ta liczba przy dzieleniu przez 35?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
SP MŁODZICY – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Szacujemy, że 651 jest 4 razy większe od 163. Wykonujemy **mnożenie** $163 \cdot 4 = 652$. Zatem liczba 652000 jest podzielna przez 163. Teraz wystarczy od niej **odjąć** 163. Szukaną liczbą jest 651837. Za wykonanie 3 działań odejmujemy 2 pkt. Za 4 działania lub więcej przyznajemy 3 pkt.

2. Uczciwa osoba jest jedna. Gdyby były dwie, dałoby się wybrać parę (właśnie te dwie osoby), w której nie byłoby żadnego skorumpowanego polityka, a to jest sprzeczne z warunkami zadania.

3. $K = 12$ ($L=13$, $M=17$, $N=11$). Dodając pierwsze dwie równości mamy $2K+2N+L+M = 76$, a dodając ostatnie dwie mamy $2L+2N+K+M = 77$. Odejmując otrzymane wyrażenia mamy $K–L=1$, czyli $L=K+1$. To ostatnie podstawiamy do drugiej z danych równości i dostajemy $K+1+2K = 3K+1=37$, czyli $3K=36$, czyli $K=12$. Za bardziej skomplikowane rachunki odejmujemy 2 pkt.

4. Spośród podanych liczb najmniejsza 3462 dzieli się przez 2 i 3 (uczeń powinien poprawnie podać cechę podzielności przez 3). Po wykonaniu tych **dwóch** dzieleń otrzymujemy 1154 i 1731. Żaden inny dzielnik tej liczby nie będzie czterocyfrowy. Kolejna najmniejsza liczba **dzieli** się przez 1154 i **nie dzieli** się przez 1731. Zatem tylko liczba 1154 spełnia warunki zadania. Za niesprawdzenie tego drugiego przypadku odejmujemy 5 pkt. Za wykonanie 5 lub 6 działań odejmujemy 2 pkt. Za 7 działań lub więcej przyznajemy 3 pkt.

5. W nowym sześcianie o 2 razy dłuższej krawędzi mieści się 8 sześcianów o krawędzi 1 dm, więc ten sześcian waży 8 razy więcej, zatem 9,6.

6. Tomek musi wyjąć co najmniej 16 skarpet. W szufladzie jest 6 skarpet czarnych, zatem gdyby wyjął 14 skarpet, mogłoby się zdarzyć, że żadna nie jest czarna. Gdyby wyjął 15 skarpet, mogłaby być wśród nich tylko jedna czarna. Wśród 16 skarpet muszą być dwie czarne, bo skarpet w innych kolorach jest tylko 14.

7. Niech C oznacza liczbę chłopców, a D – liczbę dziewczynek. Wiemy, że $D+C = 38$, skąd $2D + 2C = 76$. Wiemy też, że $D/2 + C/3 = 15$, co po pomnożeniu przez 6 daje $3D + 2C = 90$. Mamy zatem $D+2D+2C = D+76 =90$, skąd $D=14$, czyli $C=24$.

8. Kłamie tylko jeden chłopiec. Jeśli to Adam, wtedy prawdą jest, że zajął I albo ostatnie miejsce, ale wówczas skłamałby także Celestyn lub Damian. Jeśli kłamie Bartek, to prawdą jest, że zajął ostatnie miejsce, ale wówczas skłamałby także Damian. Jeśli kłamie Damian, to nikt nie zająłby ostatniego miejsca. Te przypadki zajść nie mogą. Jeśli zaś kłamie Celestyn, to znaczy, że on nie był pierwszy i wówczas Damian był IV, Adam i Celestyn podzielili się miejscami II i III, a Bartek był I i w wypowiedziach chłopców nie ma sprzeczności. Zatem kłamie Celestyn, a zawody wygrał Bartek.

9. Jeśli kąt ABC nie leży przy podstawie, to kąty BAC i ABC mają po 72°. Skoro AD dzieli kąt CAB na połowy, to kąty CAD i DAB mają po 36^o.Z tego wynika, że kąt ADB ma 72° i trójkąt ABD jest równoramienny z ramionami AB i AD. Stąd $|AB|= 8$. Jeśli kąt ABC leży przy podstawie, to pozostałe kąty mają 36° i 108°, zatem trójkąt nie jest ostrokątny.Za nierozważenie jednego z przypadków odejmujemy 5 pkt.

10. Niech n oznacza szukaną liczbę. Wiadomo, że $n–1$ jest podzielna przez 5 i 7, zatem jest podzielna przez 35, bo 5 i 7 są względnie pierwsze (za brak powołania się na względną pierwszość odejmujemy 3 pkt, np. jeśli coś dzieli się przez 4 i 6, nie musi dzielić się przez 24, np. 12). Wobec tego liczba n przy dzieleniu przez 35 także daje resztę 1.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019

SP MŁODZICY – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1) Dziesięć osób odbiera po przyjęciu swoje płaszcze. W korytarzu jest ciemno i panuje spore zamieszanie. Niektórzy mogli zabrać nie swój płaszcz. Jeśli dziewięć osób ma swój płaszcz, to jakie jest prawdopodobieństwo, że dziesiąta osoba ma cudzy?

2) Która jest godzina, jeśli do końca doby pozostało jeszcze $^2/_3$ tego, co już upłynęło?

3) Janek na wadze szalkowej ważył swoje drewniane klocki, które miały kształt jednakowych sześcianów, piramidek lub kulek. Sześcianik ważył 2 dag. Dwie kulki równoważyły 2 piramidki i sześcian. Cztery sześciany równoważyła kulka i sześcian. Ile piramidek zrównoważy pięć kulek?

4) Pewien czworokąt ma wszystkie boki równe, a jego jeden kąt ma miarę 25°. Podaj miary pozostałych jego kątów.

5) W hotelu „Hot Dog" mieszka łącznie 10 psów i kotów. Właścicielka ma 56 ciasteczek, którymi chcesz nakarmić swoich podopiecznych. Gdy każdy pies zje sześć ciasteczek, a każdy kot – pięć zostanie jedno ciasteczko dla właścicielki. Ile kotów mieszka w hotelu?

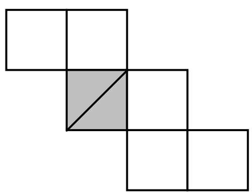
6) Palindromy to wyrazy lub zdania, które nie zmieniają się, gdy czytamy je od końca. Oto przykłady palindromów: OKO, KAJAK, WÓŁ UTYŁ I MA MIŁY TUŁÓW. Palindromami mogą być również liczby, np. 343, 1111, 50605. Ile jest wszystkich liczbowych palindromów czterocyfrowych?

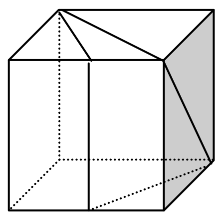
7) Ilu co najmniej uczniów musi być w klasie, aby mieć pewność, że znajdzie się wśród nich troje spod tego samego znaku zodiaku?

8) Dostawca psiej karmy pakuje go do pudełek o pojemności 16 kg lub 17 kg. Schronisko dla zwierząt dostało dotację, za którą może kupić dokładnie 1001 kg karmy. Ile pudełek powinno kupić, aby jak najwięcej z nich było jak najlżejszych? W rozwiązaniu wykonaj jak najmniej rachunków.

9) Jaka jest suma cyfr liczby $10^{2018} – 2018$?

10) Na podanej siatce sześcianu dokończ drogę z rysunku. Wykonanie siatki i manipulacja nią są niedozwolone





DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVIII – ROK SZKOLNY 2018/2019
SP MŁODZICY – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Dziesiąta osoba także musi mieć swój płaszcz, bo tylko ten jej został. Prawdopodobieństwo, że ma cudzy wynosi więc zero.

2. Niech od północy minęło x godzin. Mamy $x + {}^{2}/_{3}\, x = 24$. Stąd ${}^{5}/_{3}\, x = 24$, czyli $x = 14{,}4$. Ale ${}^{4}/_{10}$ godziny to $4 \cdot 6 = 24$ minuty. Zatem jest 14:24.

3. Niech S, P, K oznaczają odpowiednio masy pojedynczego sześcianu, piramidki i kulki. Wiadomo, że $S=2$, $4S = K+S$, czyli $K=3S = 6$ oraz $2K= S+2P$, czyli $12 = 2+2P$, skąd $P=5$. Zatem $5K = 6P$. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt.

4. Niech P i K to odpowiednio liczby psów i kotów w hotelu. Wiadomo, że $K=10–P$ oraz $6P+5K = 55$, po podstawieniu mamy $6P + 5(10–P) = P–50 = 55$. Stąd $P=5$ i kotów też jest 5.

5. Czworokąt ten jest rombem i ma 2 pary równych kątów. Zatem pozostałe kąty czworokąta wynoszą 25°, 65° i 65° = (180–50):2.

6. Na pierwszym miejscu w liczbie czterocyfrowej może stać jedna z 9 cyfr (nie może być 0, bo liczba będzie trzycyfrowa). Wtedy na ostatnim miejscu musi stać ta sama cyfra. Na drugim miejscu może stać każda z 10 cyfr i wtedy na 3 miejscu stoi ta sama cyfra. Pierwsze 2 pozycje można więc obsadzić na $9 \cdot 10 = 90$ sposobów i tyle jest czterocyfrowych palindromów.

7. Jeśli klasa liczy 24 uczniów, może się zdarzyć tak, że są po 2 osoby spod każdego znaku. Ponieważ znaków jest 12, w 25 osobowej klasie na pewno są 3 osoby spod tego samego znaku.

8. Nie można kupić nieparzystej liczby kilogramów karmy w paczkach po 16 kg. Niech A oznacza liczbę mniejszych pudełek, a B większych. Mamy $16A + 17B = 1001$, czyli $16(A+B) + B = 1001$, czyli $16(A+B) = 1001–B$ i B ma być najmniejsze z możliwych. Widać, że 1008 dzieli się przez 16 (po dzieli się przez 8 – cecha podzielności, a wynik pozostaje parzysty). Poprzednia wielokrotność 16 to **1008–16** = 992 = **1001–9**. Zatem B=9, a łączna liczba pudełek karmy to 62 = **992:16**. W rozwiązaniu wykonano tylko 2 odejmowania i dzielenie. Za wykonywanie większej ilości rachunków odejmujemy 3 pkt. Za próby rachowania 'na piechotę' odejmujemy 5 pkt.

9. Odjemna ma 2019 cyfr (1 i 2018 zer). Na podstawie algorytmu pisemnego odejmowania można ustalić, że różnica ma 2018 cyfr, z czego czterocyfrowa końcówka to 7982 i jeszcze 2014 dziewiątek. Suma jej cyfr to $26+2014 \cdot 9 = 18152$.

10. Rozwiązanie przedstawia rysunek. Na początku ustalamy na siatce ściany przyległe do szarej, na których przebiegają linie (która z nich jest górna, która dolna i która frontowa), a potem kierunek przebiegu tych linii. Powinny one tworzyć na siatce drogę zamkniętą Za poprawną odpowiedź bez uzasadnienia że jest poprawna przyznajemy 5 pkt.