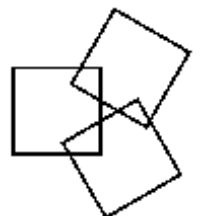




**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**  
**EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14**  
**SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA**  
**MECZ I**

- 1) Joasia wybrała się na 5-godzinny spacer po górach. Jej średnia prędkość marszu wynosiła pomiędzy 3km/h a 4 km/h [czytaj: kilometry na godzinę]. Jaka drogę pokonała Joasia podczas spaceru?
- 2) Pani Plotkarska spotkała trzy osoby i zdradziła im pewna tajemnicę. Każda z tych trzech osób spotkała trzy inne osoby i też zdradziła im tę tajemnicę. Ile osób zna tajemnicę pani Plotkarskiej?
- 3) Brat Basi ma siedem kredek czerwonych, cztery niebieskie, pięć zielonych, dwie żółte, trzy brązowe i jedną czarną. Wyjmuje je z pudełka z zamkniętymi oczami. Ile co najmniej powinien ich wziąć, żeby była wśród nich przynajmniej jedna kredka każdego koloru?
- 4) Dwa boki trójkąta  $KOT$  mają tę samą długość, a kąt  $KOT$  ma miarę  $55^\circ$ . Jaka może być miara kąta  $KTO$ ?
- 5) Zapis  $a^5$  [czytaj:  $a$  do potęgi piątej] oznacza pięciokrotne mnożenie liczby  $a$  przez siebie. Ile wynosi suma cyfr liczby, która jest wynikiem odejmowania  $10^{101}-3$ ?
- 6) Czy wynik działania  $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\dots+(1+2+3+\dots+2013)$  jest liczbą parzystą?
- 7) Z czterech sprawdzianów Małgosia uzyskała średnią 12 pkt. Ile najmniej punktów wystarczy że zdobędzie z piątego sprawdzianu, aby osiągnąć średnią 17 punktów?
- 8) Dwusieczna kąta to półprosta, która wychodzi z wierzchołka kąta i przecina ten kąt na połowy. W trójkącie  $ABC$  dwusieczne kątów  $ABC$  i  $ACB$  przecinają się w punkcie  $D$ . Miara kąta  $BDC$  wynosi  $140^\circ$ . Jaka jest miara kąta  $BAC$ ?
- 9) Jakie ciężary można odważyć, mając do dyspozycji wagę szalkową i po jednym odważniku o masie: 1 kg, 3 kg, 9 kg i 27 kg?
- 10) Na rysunku przedstawiono trzy jednakowe kwadraty. Pola trzech nakładających się części wynoszą  $2\text{ cm}^2$ ,  $5\text{ cm}^2$  i  $8\text{ cm}^2$ . Łączne pole nienakładających się części to  $117\text{ cm}^2$ . Jaka jest długość boku kwadratu?





**EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14**  
**SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ I**  
**SZKICE ROZWIĄZAŃ**

1. Im szybciej człowiek idzie, tym dłuższą pokona drogę. Gdyby Joasia szła z prędkością 3 km/h w czasie 5-godzin przeszłaby 15 km, a gdyby szła z prędkością 4 km/h przeszłaby 20 km. Zatem pokonała drogę między 15 a 20 km.
2. Wtajemniczonych osób jest  $1+3+3\cdot 3=13$ . Za pominięcie pani Plotkarskiej odejmujemy 5 pkt.
3. Jeśli weźmie 21 kredek, to może się okazać, że nie ma wśród nich czarnej, musi więc wziąć wszystkie 22.
4. Jeśli *KOT* ma dwa boki takiej samej długości, to jego dwa kąty mają tyle samo stopni. Mogą to być kąty *KOT* i *KTO* - wówczas *KTO* ma  $55^\circ$ , *KOT* i *TKO* - wówczas *KOT* ma  $70^\circ$ , albo *TKO* i *KTO*, a wtedy odpowiedzią jest  $62,5^\circ$ . Za pominięcie jednej możliwości odejmujemy 5 pkt. Za pominięcie dwóch przyznajemy 2 pkt.
5. Liczba  $10^{101}$  to jedynka i 101 zer. Po odjęciu trójki będzie to 100 dziewiątek i na końcu siódemka (co uzasadnia się algorytmem odejmowania pisemnego, za podanie tego faktu bez uzasadnienia odejmujemy 2 pkt). Zatem szukana suma cyfr to  $100\cdot 9+7=907$ .
6. Składniki parzyste nie wpływają na parzystość sumy, wystarczy więc zliczyć składniki nieparzyste: jedynka występuje 2013 razy, trójka 2011, piątka 2009, ..., 2013 raz. W wyrażeniu  $2013\cdot 1 + 2011\cdot 3 + \dots + 1\cdot 2013$  wszystkie składniki są nieparzyste i jest ich 1007 (za brak uzasadnienia tej liczby składników odejmujemy 2 pkt), czyli nieparzyście wiele. Stąd cała suma jest nieparzysta.
7. Niech  $a, b, c, d$  to punkty otrzymane z 4 sprawdzianów. Ich średnia  $(a+b+c+d)/4$  wynosi 12, więc suma liczb  $a, b, c, d$  wynosi 48. Jeśli  $e$  to wynik z piątego sprawdzianu, otrzymamy  $(48+e)/5 = 17$ , skąd  $e = 37$ .
8. Przy standardowych oznaczeniach mamy w trójkącie *BDC* sumę kątów wewnętrznych  $\beta/2+\gamma/2+140^\circ=180^\circ$ , skąd  $\beta+\gamma=80^\circ$ . Suma kątów wewnętrznych w trójkącie *ABC* wynosi więc  $\alpha+80^\circ=180^\circ$ , skąd szukany kąt ma miarę  $100^\circ$ .
9. Wszystkie od 1 (lub od 0) do  $40=1+3+9+27$ . Za sprawdzanie wszystkich ustawień bez ustalenia systematycznej procedury odejmujemy 1 pkt. Za brak jednego ciężaru przyznajemy 5 pkt, za więcej niż jednego 0 pkt. Uczeń powinien podać procedurę uzyskiwania kolejnych ciężarów, np. taką (ustalamy, że ważony ciężar jest na lewej szalce): Gdy waga jest od razu w równowadze, jest to ciężar zerowy. Jeśli nie, to stawiamy odważnik 1-kilogramowy na szalce prawej. Gdyby lewa wciąż przeważała, przekładamy go na lewą, a na prawej stawiamy 3 kg. Jeśli lewa nadal jest cięższa, zdejmujemy odważnik kilogramowy. Potem dostawiamy go po prawej, a jeśli szalka z ważonym ciężarem jest nadal cięższa, przenosimy na nią oba odważniki, a na prawej stawiamy kolejny - 9 kg itd.
10. Każda wspólna część należy do dwóch kwadratów. Zatem łączne pole trzech kwadratów to suma pola części nienakładających się oraz podwojonej sumy części nakładających się, zatem  $117+2\cdot(2+5+8) = 147 \text{ cm}^2$ , czyli na jeden kwadrat przypada pole  $147:3=49 \text{ cm}^2$ , stad szukany bok ma 7 cm.



**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**  
**EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14**  
**SZKOŁA PODSTAWOWA – RUNDA ELIMINACYJNA**  
**MECZ II**

- 1) Na Wyspach Bergamutach znane jest działanie  $*$  zdefiniowane w następujący sposób:  $a*b = ab+a+b$ . Wiadomo, że  $3*5 = 2*x$ . Ile wynosi  $x$ ?
- 2) Złotowłosa księżniczka została uwięziona na szczycie ponurej baszty. Dzielny książę pragnie ją uwolnić, ale nie może podejść bliżej niż na skraj lasu oddalonego od baszty o 500 stóp. Z tego miejsca widzi basztę pod kątem 45 stopni. Jak wysoka jest baszta?
- 3) W pewnym miesiącu niedziela wypadła trzykrotnie w dniu parzystym. W jakim dniu tygodnia wypadł 20 dzień tego miesiąca?
- 4) Wypisujemy liczby 1, 2, 4, 5, 6, ... - kolejne całkowite dodatnie, pomijając takie, które mają w swoim zapisie trójkę. Jaka będzie tysięczna wypisana liczba?
- 5) Prostopadłościenny pojemnik napełniony po brzegi waży 5 kg, a napełniony do połowy – tylko 3,25 kg. Ile waży pusty pojemnik?
- 6) Jaka jest cyfra jedności liczby  $2013^{2014}$ ?
- 7) Płaszczyznę da się pokryć, używając nieskończenie wielu przystających kwadratów, trójkątów równobocznych lub sześciokątów foremnych. A czy można to zrobić za pomocą jakiegoś innego wielokąta foremnego?
- 8) Liczby  $a, b, c$  są dodatnie i spełniają warunki:  $\frac{c}{a-b} = 3$  oraz  $\frac{c}{a+b} = 2$ . Która z tych liczb jest najmniejsza?
- 9) W klubie pływackim Delfin są trzy kategorie zawodników: juniorzy, seniorzy i weterani. Stosunek juniorów do seniorów wynosi 3:2, a seniorów do weteranów 5:2. Ilu członków może liczyć klub Delfin?
- 10) Ściany ośmiościanu foremnego (rysunek) należy pomalować w taki sposób, aby każde dwie mające wspólną krawędź miały inne kolory. Jaka jest najmniejsza potrzebna do tego liczba kolorów?





**EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14**  
**SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA- MECZ II**  
**SZKICE ROZWIĄZAŃ**

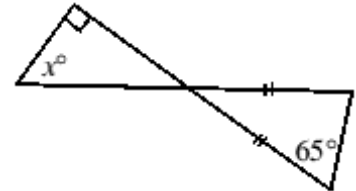
1. Mamy  $3*5=15+3+5=23$  oraz  $2*x=2x+2+x=3x+2 = 23$ . Stąd  $3x = 21$ , czyli  $x=7$ .
2. Zakładamy że baszta stoi prosto na płaskim terenie (za brak tego modelowania odejmujemy 1 pkt). Skoro książkę widzi z poziomu ziemi basztę pod kątem  $45^\circ$  (tzn. proste wychodzące z oka do podstawy i szczytu baszty tworzą taki właśnie kąt), to odległość od baszty jest równa jej wysokości, bo otrzymamy trójkąt prostokątny równoramienny. Zatem wysokość baszty to 500 stóp.
3. Skoro w miesiącu były 3 parzyste niedziele, to musiały być rozdzielone 2 nieparzystymi (tydzień ma nieparzystą liczbę dni, więc dni tygodnia zmieniają parzystość daty w obrębie miesiąca z tygodnia na tydzień – za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 2 pkt). Zatem w miesiącu niedziel było co najmniej 5. Jeśli miesiąc zaczyna się niedzielą i ma ich 5, musi mieć co najmniej 29 dni, ale jeśli trzy z nich mają mieć daty parzyste, pierwsza musi wypaść w drugim dniu miesiąca, co daje 30 dni. Nie może wypaść w czwartym dniu miesiąca (lub później), bo wtedy miesiąc musiałby mieć 32 dni (lub więcej), co jest niemożliwe. Daty pozostałych niedziel wypadają co 7 (9, 16, 23 i 30 dnia), a dzień dwudziesty jest czwarty po niedzieli, czyli jest czwartkiem.
4. Szukaną liczbą jest 1441. Do 1400 pominiemy 200 liczb, które mają trójkę na miejscu setek, a z pozostałych 1200 liczb 10 w każdej setce ma trójkę jako cyfrę dziesiątek, a 9 innych trójkę na pozycji jedności, więc do 1400 wypisane będą  $1200-19\cdot 12 = 972$  liczby, a kolejnych 28 to 1401, 1402, 1403, ..., 1441 poza 1403, 1413, 1423 i 1430 do 1439.
5. Niech  $x$  to masa pojemnika, a  $y$  – masa substancji wypełniającej go w całości. Mamy  $5 = x+y$  (skąd  $y=5-x$ ) oraz  $3,25 = x+y/2$ . Podwajając wielkości po obu stronach drugiej równości otrzymujemy  $6,5 = 2x+y$ , czyli  $6,5 = 2x+5-x$  rozwiązaniu układu równań otrzymujemy  $x=1,5$  kg.
6. Ostatnia cyfra iloczynu liczb zależy tylko od ostatnich cyfr czynników, co wynika z algorytmu mnożenia pisemnego (za brak tej uwagi odejmujemy 2 pkt). Wystarczy więc badać kolejne iloczyny trójek, a ich ostatnia cyfra zmienia się okresowo w cyklu długości cztery: 3, 9, 7, 1. Liczba 2014 daje z dzielenia przez 4 resztę dwa, zatem szukana cyfra to 9.
7. Nie można, bo kąty stykających się wierzchołkiem wielokątów muszą sumować się do  $360^\circ$ , więc pięciokątów foremnych musiałoby stykać się  $3\frac{1}{3}$ , a siedmio- i więcej-kątów foremnych - mniej niż trzy, co jest niemożliwe.
8. Najmniejsze jest  $b$ . Z I warunku  $a-b>0$ , czyli  $a>b$ . Warunki zadania można zapisać równoważnie jako  $2c=6a-6b$  oraz  $3c=6a+6b$ . Po dodaniu ich stronami mamy  $5c=12a$ , więc  $c=(12/5)a$ , czyli  $c>a$ .
9. Na każdym 2 seniorów przypada 3 juniorów, a na każdym 5 seniorów jest 2 weteranów. Najmniejszą wspólną wielokrotnością 2 i 5 jest 10, wobec czego liczba seniorów jest wielokrotnością 10 i na każdym 10 seniorów wypada 15 juniorów i 4 weteranów. Zatem wszystkich członków jest 29 dla każdej kolejnej dziesiątki seniorów. Zatem można stwierdzić, że liczba członków klubu jest wielokrotnością liczby 29.
10. Do górnej połowy wystarczą dwa kolory (malujemy nimi na przemian). W dolnej połowie malujemy ścianę na białą, jeśli graniczy od góry z czarną, oraz na czarno, jeśli graniczy od góry z białą. To daje naprzemienny układ kolorów także na dolnej połowie, zatem dwa kolory wystarczą. Za podanie odpowiedzi bez opisania ogólnej procedury kolorowania odejmujemy 2 pkt.



**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**  
**EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14**  
**SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA**  
**MECZ III**

1) Na polu golfowym Jędrək zebrał dwa razy więcej piłeczek niż Rysiek i o pięć więcej niż Majka. Wspólnie zebrał 35 piłeczek. Ile z nich znalazł Jędrək?

2) Jaką miarę ma kąt  $x$ , jeśli kąt oznaczony kwadracikiem jest prosty, a odcinki dwukreślne są jednakowe?



3) Piotrek ma trzy razy więcej siostr niż braci, a jego siostra Luiza ma dwa razy więcej siostr niż braci. Ile dzieci jest w tej rodzinie?

4) Rozmawia czterech braci. Dwóch mówi prawdę, a dwóch się myli. Kto mówi prawdę?  
Bazył mówi: Karmazyl jest z nas najmłodszy. Karmazyl: Nie jestem najmłodszy ani najstarszy.  
Horacy: Karmazyl jest najstarszy, a ja – najmłodszy. Ignacy: Urodziłem się ostatni.

5) Jasek wysypał z woreczka swoje kości do gry. Kiedy popatrzył na otrzymane wyniki ze zdziwieniem stwierdził, że ich suma jest taka sama jak iloczyn. Na kostkach Jaśka wypadła dwójka, trójka, piątka, a poza tym same jedynki. Ile kostek wysypał Jasek z woreczka?

6) Ile wynosi suma cyfr liczby  $10^{2013} - 2013$ ?

7)  $ABCDE$  jest pięciokątem wypukłym o równych wszystkich bokach i jednakowych kątach. Punkt  $F$  leży wewnątrz tego pięciokąta w takim miejscu, że trójkąt  $BCF$  jest równoboczny. Jaką rozwartość ma kąt  $FAB$ ?

8) Czy liczba, której zapis dziesiętny jest następujący  $aababbab$ , gdzie  $a$  i  $b$  są pewnymi cyframi, jest podzielna przez 11?

9) Z zapalek długości 5 cm należy ułożyć kwadratową „szachownicę” o boku 1 m (pola tej szachownicy to kwadraty o boku długości jednej zapalki). Ile zapalek trzeba w tym celu użyć?

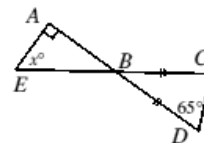
10) Czy kwadrat da się podzielić na 1234567 kwadratów?



**EDYCJA III – ROK SZKOLNY 2013/14**  
**SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA - MECZ III**  
**SZKICE ROZWIĄZAŃ**

1. Jeśli Rysiek zebrał  $x$  piłeczek, to Jędrzek  $2x$ , a Majka  $2x-5$ . Mamy  $x+2x+2x-5 = 5x-5 = 35$ . Stąd  $5x=40$  i  $x=8$ , czyli Jędrzek zebrał 16 piłeczek. Za odpowiedź 8 przyznajemy 4 pkt.

2. Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku. Trójkąt  $BCD$  jest równoramienny, więc  $\angle BCD=65^\circ$ , a  $\angle CBD=50^\circ$  z sumy kątów wewnętrznych trójkąta. Także  $\angle ABE=50^\circ$  jako kąt wierzchołkowy i  $x=40^\circ$  jako dopełnienie  $ABE$  do  $90^\circ$ .



3. Niech  $D$  i  $C$  to liczby dziewcząt i chłopców. Piotrek ma  $D$  siostr i  $C-1$  braci, więc  $D=3(C-1)$ , zatem  $D-1=3C-4$ . Luiza ma  $D-1$  siostr i  $C$  braci, więc  $D-1=2C$ . Przyrównując obie wielkości  $D-1$ , mamy  $3C-4 = 2C$ , czyli  $C=4$  i  $D=9$ . Dzieci w rodzinie jest 13. Za podanie odpowiedzi i sprawdzenie, że spełnia warunki zadania bez wykazania, że nie ma innych możliwości przyznajemy 3 pkt.

4. Gdyby Bazyl mówił prawdę, pozostała trójka nie miałaby racji (ich wersje są sprzeczne z jego), a tak nie jest. Zatem Bazyl kłamie. Gdyby Horacy mówił prawdę, pozostała trójka nie miałaby racji, więc Horacy też kłamie. Zatem prawdę mówią Ignacy i Karmazyl. Sytuacja opisana wypowiedziami z zadania ma np. miejsce, gdy chłopcu urodzili się w kolejności B, K, H, I, zatem warunki zadania dadzą się wypełnić (za niesprawdzenie tego odejmujemy 1 pkt). Za odpowiedź bez uzasadnienia wskazującego, że inne sytuacje nie są możliwe przyznajemy 4 punkty.

5. Niech  $x$  oznacza liczbę kostek, na których wypadły jedynki. Mamy  $1^x \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$  oraz  $x+2+3+5 = 30$ . Stąd  $x=20$ , zatem Jasiak wysypał 23 kostki. Za odpowiedź 20 przyznajemy 5 pkt.

6.  $10^{2013}$  to jedynka i 2013 zer. Po odjęciu 2013 na ostatnich czterech miejscach są cyfry 7987, a wcześniej jest 2009 dziewiątek, co wynika z algorytmu odejmowania pisemnego (za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 2 pkt). Zatem suma cyfr wynosi  $2009 \cdot 9 + 7 + 9 + 8 + 7 = 2010 \cdot 9 + 22 = 18090 + 22 = 18112$ .

7. Suma kątów wewnętrznych pięciokąta wynosi  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ , co wynika z podziału na 3 trójkąty (za brak tego rozumowania odejmujemy 3 pkt). Ponieważ kąty wewnętrzne są równe, każdy ma po  $540^\circ : 5 = 108^\circ$ . W trójkącie równobocznym każdy kąt ma  $60^\circ$ , więc  $\angle FBC = 60^\circ$ . Wtedy  $\angle ABF = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$ . Trójkąt  $ABF$  jest równoramienny, bo  $AB=BF(=BC)$ , stąd  $\angle FAB$  jest jednym z równych kątów przy podstawie i ma  $(180^\circ - 48^\circ) : 2 = 66^\circ$ .

8. Liczbę  $aababbab$  można zapisać jako  $10\,000\,000a + 1\,000\,0006a + 100\,000b + 10\,000a + 1\,000b + 100b + 10a + b = 11010010a + 101101b$ . Oba współczynniki liczbowe dzielą się przez 11, czyli oba składniki dzielą się przez 11, a więc ich suma też.

9. Na długości 1 m mieści się 20 zapalek. Na każdym początku i końcu zapalki dokładamy prostopadłą do niej (jeżeli 2 zapalki leżą obok siebie, to prostopadła do końca poprzedniej jest też prostopadła do początku następnej). Otrzymujemy 21 wierszy po 20 zapalek i 21 kolumn po 20 zapalek, czyli 840 zapalek. Za podanie wyniku bez uzasadnienia przyznajemy 3 pkt.

10. Kwadrat łatwo podzielić na 4 kwadraty. Jeśli dowolny z nich podzielimy też na 4 kwadraty, to oryginalny kwadrat będzie podzielony na 7 kwadratów. Jeśli którykolwiek z nich znów podzielimy na 4, liczba kwadratów znowu wzrośnie o 3 itd. Możemy więc otrzymać  $4+3+3+3+\dots+3 = 1+3+3+3+3+\dots+3$  kwadraty, gdzie liczba trójek jest dowolna. Ponieważ 1234567 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, w pewnym kroku takiego postępowania, podzielimy wyjściowy kwadrat na 1234567 kwadratów.